



دوفصلنامه تاریخ علوم و فناوری دوره اسلامی
سال دوازدهم، شماره‌های اول و دوم، سال ۱۴۰۲
شماره پیاپی: ۲۳ و ۲۴

صاحب امتیاز: مؤسسه پژوهشی میراث مکتوب
مدیر مسئول: اکبر ایرانی
سردبیر: محمد باقری
مدیر داخلی: زینب کریمیان
اجرای جلد: محمود خانی

مدیر فنی و امور چاپ: حسین شامولوفرد

همکاران علمی

حسن امینی * حمید بهلول * پویان رضوانی * فاطمه سوادی * حنیف قلندری * یونس کرامتی * امیرمحمد گمینی
شمامه محمدی‌فر * راضیه‌سادات موسوی * یونس مهدوی * سجاد نیکفهم خوب‌روان

مشاوران علمی

یوسف ثبوتی * توفیق حیدرزاده
محمدابراهیم ذاکر * حسن طارمی * مهدی محقق
حسین معصومی‌همدانی * محمدجواد ناطق * سیدحسین نصر
علی بابایف (جمهوری آذربایجان) * جان لنارت برگرن (کانادا) * گلن وان بروملن (کانادا) * احمد جبار (فرانسه)
سرگی دمیدوف (روسیه) * رشدی راشد (فرانسه) * جمیل رجب (کانادا) * سری‌رامولا سارما (آلمان)
ژاک سزینانو (سوئیس) * جورج صلیبا (امریکا) * حکیم سید ظل‌الرحمان (هند) * رادا چاران گوپتا (هند)
مصطفی موالدی (سوریه) * یان پیتر هوخندایک (هلند) * میچیو یانو (ژاپن)

تصویر پشت جلد: روش ترسیم گونیاهاى مختلف، نسخه خطی ۵۰۹۴۴ کتابخانه آستان قدس رضوی (برگ ۳۱ر).

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شماره ۱۱۸۲، طبقه چهارم، شماره ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دوزنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com
بها: ۶۰۰۰۰ تومان



فهرست

۱ | سر سخن

مقاله

- ۳ | از سمرقند به هرات
حسن امینی
- ۱۳ | رده‌بندی گیاهان و جایگاه این علم در متون ایران باستان
و منابع طبقه‌بندی علوم دوره اسلامی
شمامه محمدی‌فر
- ۲۴ | جورج سارتون و محمود حسایی در یک قاب
توفیق حیدرزاده
- ۳۱ | بررسی تاریخ علم و فناوری در آثار ادبی، سفرنامه‌ها،
و سایر متن‌های نامرتبط
محمدجواد ناطق
- ۴۰ | نظریهٔ اختلاف منظر در نجوم دوره اسلامی
ای. اس. کیدی، ترجمهٔ سجاد نیک‌فهم خوب‌روان
- ۶۸ | جغرافیا و نقشه‌نگاری در تمدن اسلامی تا سال ۷۰۰ قمری
مایکل بانر، ترجمهٔ مجید همراه
- ۸۴ | مثلثات کاشانی در زیج خاقانی
جواد همدانی‌زاده، ترجمهٔ مهسا راقب
- ۹۴ | آغاز کاربرد فارسی به عنوان زبان علم
حسین کمالی، ترجمهٔ افسانه منفرد
- ۱۰۲ | مقدمهٔ الجواهر فی الجواهر بیرونی
سامی خلف حمارنه، ترجمهٔ علیرضا باقر

معرفی کتاب

- ۱۲۸ | کتابی جامع در هیئت برای پادشه‌زادهٔ ایران: تصحیح و ترجمهٔ
انگلیسی رسالهٔ معینیه و حل اشکالات آن نوشتهٔ نصیرالدین
طوسی
امیرمحمد گمینی
- ۱۳۸ | اختیارات مظفری
حنیف قلندری

معرفی فیلم مستند

- ۱۴۱ | چیزهایی که زمان با خود برد
امیرمحمد گمینی

رسائل

- ۱۴۸ | رساله‌ای فارسی در هندسهٔ عملی
نرگس عصارزادگان



مثلثات کاشانی در زیج خاقانی^۱

جواد همدانی زاده^۲

ترجمه مهسا راقب^۳

۱. مقدمه

این مقاله جداول مثلثاتی کاشانی را شرح می‌دهد و متن مرتبط با آن را که در کتاب نجومی زیج خاقانی آمده است، تحلیل می‌کند (برای خلاصه‌ای از این زیج و سایر زیج‌های ذکر شده در این مقاله، بنگرید به [کندی، ۱۹۵۶]). برخی از قوانین درونیابی و یک مثال حل شده بر اساس داده‌های عددی جدول سینوس‌ها نیز تحلیل شده است.

منبع این مقاله، نسخه خطی Ethé 2232 (کتابخانه ایندیا آفیس، نسخه خطی فارسی شماره ۴۳۰) است که یکی از نسخه‌های موجود از زیج خاقانی اثر غیاث الدین جمشید کاشانی (ح ۸۲۰ ق)، دانشمند و ریاضیدان برجسته ایرانی سده نهم هجری است.^۴

منبع در فصل دوم و سوم از باب اول مقاله دوم (برگ ۲۶ پ، سطرها ۳ تا ۲۳؛ برگ ۲۷ ر، سطرها ۱ تا ۲۰)، توابع مثلثاتی سینوس، کسینوس، سینوس معکوس^۵، تانژانت و کتانژانت را تعریف می‌کند و جداولی برای توابع سینوس و تانژانت می‌آورد (برگ ۳۵ پ تا ۴۲ ر).

جدول سینوس‌ها برای هر دقیقه کمان از ۰ تا ۹۰ درجه، تا چهار رقم شصتگانی داده شده است. جدول تانژانت ابتدا برای هر دقیقه کمان از ۰ تا ۴۵ درجه و سپس برای هر پنج دقیقه کمان از ۴۵ تا ۸۹ درجه و ۵۵ دقیقه آورده شده است. با این حال، بخش پایانی جدول تانژانت ناقص است و بخشی از چهار ستون آن خالی مانده است، شاید برای آنکه بعداً پر شود اما به دلیل نامعلومی، نویسنده یا کاتب این کار را نکرده است.

۱. این مقاله ترجمه‌ای است از:

Javad Hamadanizadeh, "The Trigonometric Tables of al-Kāshī in his *Zīj-i Khāqānī*", *Historia Mathematica*, 7, 1980, pp. 38-45.

۲. استاد پیشین دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف (د ۱۳ شهریور ۱۴۰۰). برای آگاهی از زندگی و آثار او بنگرید به میراث علمی، سال دهم، شماره‌های ۱۹ و ۲۰، ص ۱۶۶-۱۷۰.

۳. پژوهشگر آزاد، mahsaragheb@gmail.com

۴. در ترجمه این مقاله از نسخه ایاصوفیای زیج خاقانی (به شماره ۲۶۹۲) استفاده شده است.

۵. سینوس معکوس هر کمان a برابر با $1 - \cos a$ است.

در بخش ۲ (این مقاله)، نمادگذاری به کار رفته در این مقاله تعریف شده است. بخش ۳ به جدول سینوس‌ها اختصاص دارد و سطرهایی مرتبط با آن از متن را عرضه می‌کند که نحوه استفاده از جداول را توضیح می‌دهد، و سپس دو روش درونیابی را که باید در جداول به کار رود توصیف و آنها را در یک مثال حل شده اعمال می‌کند. بخش ۴ متن را شرح می‌دهد و روش‌های درونیابی را از دیدگاه هندسی بررسی می‌کند. جدول تانژانت‌های منبع در بخش ۵ به طور خلاصه مورد بحث قرار گرفته است. در نهایت، بخش ۶ شامل بازنویسی جداول‌ها و بحث در مورد دقت آنهاست. برای درک بهتر مثال حل شده در متن، نمونه‌ای از بازنویسی جدول سینوس‌ها در بخش ۴ آمده است. کل جدول‌های بازنویسی شده در این مقاله نیامده است.

۲. نمادگذاری

کاشانی برای تعریف توابع مثلثاتی، شعاع دایره (R) را ۶۰ در نظر می‌گیرد، که در زمان او رایج بود. این امر تقسیم و ضرب مکرر بر ۶۰ را ضروری می‌کند. با این حال، از آنجا که همین عدد به عنوان مبنای دستگاه عددی ارزش مکانی به کار می‌رود، دشواری چندانی پیش نمی‌آید. این فقط شامل (به اصطلاح ما) جابجایی «نقطه شصتگانی»^۱ یک رقم به ترتیب به چپ یا راست است. برای نمایش توابع در مفهوم قدیم آن حرف اول را به صورت بزرگ (کاپیتال) می‌آوریم. پس رابطه بین نماد جیب که کاشانی به کار می‌برد و تابع سینوس امروزی چنین است:

$$\sin x = R \sin x \quad (1)$$

برای همه توابع مثلثاتی دیگر هم همین کار انجام می‌شود.^۲ نویسنده این مقاله، جداول منبع را با در نظر گرفتن رابطه (۱) و تقسیم مقادیر کاشانی بر R بازنویسی کرده است.

اعداد در اینجا نیز در دستگاه شصتگانی نوشته شده‌اند؛ اما در منبع با حروف ابجد نمایش داده شده‌اند، یعنی حروف عربی که به جای اعداد به کار می‌رفتند. ما از روش رایج استفاده از نقطه ویرگول برای نشان دادن ممیز شصتگانی و از ویرگول برای جدا کردن رقم‌های شصتگانی استفاده کرده‌ایم. برای مثال ۴۸٫۷،۳۰؛ یعنی

$$10 + 48 / 60 + 7 / (60)^2 + 30 / (60)^3 = 10 / 8020832$$

تا نه رقم دهد.

۳. جدول سینوس

جدول سینوس در منبع، در برگ‌های ۳۵پ تا ۳۹پ قرار دارد. این جدول برای تک تک دقایق کمان

۱. که در حکم ممیز است و بخش صحیح و کسری عدد را جدا می‌کند.

۲. این مضارب ۶۰ سینوس و تانژانت را به ترتیب جیب و ظل می‌نامیدند. م

محاسبه و به روش خاصی که در ادامه توضیح می‌دهیم، تنظیم شده‌است. با این حال، نخست سطرهای مرتبط فصل دوم از زیج خاقانی (برگ ۲۶ پ، سطرهای ۷ تا ۱۹) را نقل می‌کنیم. این سطرها نحوه استفاده از جدول و همچنین برخی روش‌های درونیابی برای تعیین سینوس کمانی را که دارای ثانیه و ثالثه است توضیح می‌دهند. مطالب توضیحی ما درون پرانتز آمده‌است. توجه کنید که نبود اعداد منفی در کار کاشانی، او را ملزم می‌کند که تنها اندازه (قدر مطلق) توابع مثلثاتی را در نظر بگیرد.

... و چون خواهیم کی جیب قوسی حاصل کنیم، بنگریم اگر آن قوس کمتر از ربع بود چنان بگذاریم و اگر زیادت از ربع بود و کمتر از نصف دور، تمام آن با نصف دور بگیریم و اگر زیادت از نصف دور باشد و کمتر از سه ربع، نصف دور از آن نقصان کنیم و اگر زیادت از سه ربع باشد از دور نقصان کنیم حاصل را قوس «مُنْفَح» (تصحیح شده) خوانیم. پس به قوس منقح از سر جدول آنچه با درجات باشد بگیریم و به ازاء دقایق از طول جدول بگیریم و جمع کنیم و اگر با دقایق ثوانی باشد به ازاء آن هم از جدول دقایق بگیریم و یک بار منحنی بگیریم (یعنی بر مبنای R تقسیم می‌کنیم) و اگر به استقصاء خواهیم جهت ثوانی و ثالث به تعدیل مابین السطریین بر باید گرفت. مثال: خواستیم کی جیب مح و مج ل (۴۸;۶,۴۳,۳۰°) بدانیم. به ازاء درجات برگزینیم بود مد له یط یز (۴۴;۳۵,۱۹,۱۷) و به ازاء دقایق بود د یب ا (۰;۴,۱۲,۱) و به ازاء ثوانی هم از دقایق منحنی برگزینیم بود ک ط نه (۰;۰,۲۹,۵۵) و به ازاء ثالث دو بار منحنی گرفتیم بود کا (۰;۰,۰,۲۱)، مجموع را جمع کردیم و نیز جهت استقصاء هر یک را از ثوانی و ثالث در مابین السطریین کی بود ما ن ز (۰;۴۱,۵۷) ضرب کردیم حاصل آمد از ضرب ثوانی ل د (۰;۰,۳۰,۴) و از ضرب ثالث کا (۰;۰,۰,۲۱)، هر دو را با جیب درجات و دقایق جمع کردیم برین گونه:

روش آسان‌تر					روش دقیق‌تر				
	'	"	'''	''''		'	"	'''	''''
۴۸	۰;۴۴,	۳۵,	۱۹,	۱۷	۴۸	۰;۴۴,	۳۵,	۱۹,	۱۷
۶		۴,	۱۲,	۱	۶		۴,	۱۲,	۱
۴۳			۲۹,	۵۵	۴۳		۳۰,	۴	
۳۰				۲۱	۳۰				۲۱
	۰;۴۴,	۴۰,	۱,	۳۴		۰;۴۴,	۴۰,	۱,	۴۳

جدول ۱

در پایان فصل ۲، کاشانی درون‌یابی‌های معکوس مرتبط با روش‌های درون‌یابی فوق را شرح می‌دهد.

۴. شرح

در این بخش، به توضیح نحوه استفاده از جداول تهیه شده توسط کاشانی و مراحل محاسبه سینوس کمان $۴۸^{\circ} ۴۳' ۳۰''$ از جداول او می‌پردازیم. برای درک بهتر چیدمان جداول کاشانی، مراحل را که او در بخش ۳ به تفصیل شرح داده است، توضیح خواهیم داد و همچنین روش‌های او را برای درون‌یابی (تقریب بین دو مقدار موجود در جدول) بررسی خواهیم کرد. برای نمایش درجه، دقیقه، ثانیه و ثالثه به ترتیب نمادهای $^{\circ}$ ، $'$ ، $''$ ، $'''$ را به کار می‌بریم.

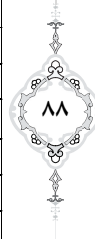
در جدول ۲ بازنویسی نیمی از برگ ۳۷ آمده است. این بخش از جدول برای درک مثالی که نویسنده منبع حل کرده، ضروری است. کاشانی برای محاسبه سینوس، ابتدا با ۴۸° درجه وارد جدول سینوس در برگ ۳۷ می‌شود. این مقدار $۱۹, ۱۷, ۳۵, ۴۴^{\circ}$ است. افزایش تابع (سینوس) به ازای $۶'$ ، که در ستون ۴۸° و مقابل عدد ۶ (در ستون دقایق سمت راست جدول) قرار دارد، $۱, ۱۲, ۴, ۰, ۰^{\circ}$ است. افزایش تابع سینوس به ازای $۴۳''$ و $۳۰'''$ به دو روش برآورد می‌شود (جدول ۱ را ببینید). در روش اول، که روش «آسان‌تر» نامیده می‌شود، افزایش تابع به ازای $۴۳''$ با تقسیم افزایش مربوط به $۴۳'$ بر ۶۰ (پایه دستگاه شصتگانی) و گرد کردن نتیجه تا چهار رقم شصتگانی به دست می‌آید. این روش به کاشانی مقدار $۰, ۰, ۲۹, ۵۵^{\circ}$ را می‌دهد. به طور مشابه، افزایش تابع به ازای $۳۰'''$ با تقسیم مقدار افزایش مربوط به $۳۰'$ بر ۶۰ و گرد کردن نتیجه تا چهار رقم شصتگانی برآورد می‌شود. این روش مقدار $۰, ۰, ۰, ۲۱^{\circ}$ را به دست می‌دهد.

رونویسی شده از برگ ۳۷ پ

$۴۵^{\circ}-۴۹^{\circ}$

سینوس	۴۵°	۴۶°	۴۷°	۴۸°	۴۹°
کمان	۴۵°	۴۶°	۴۷°	۴۸°	۴۹°
۱'	$۰; ۰, ۰, ۴۱, ۲۵$	$۰; ۰, ۰, ۴۳, ۳۹$	$۰; ۰, ۰, ۴۲, ۵۰$	$۰; ۰, ۰, ۴۲, ۲$	$۰; ۰, ۰, ۴۱, ۱۳$
۲	$۱, ۲۸, ۵۰$	$۱, ۲۷, ۱۷$	$۱, ۲۵, ۳۹$	$۱, ۲۴, ۳$	$۱, ۲۲, ۲۵$
۳	$۲, ۱۳, ۱۴$	$۲, ۱۰, ۵۴$	$۲, ۸, ۲۸$	$۲, ۶, ۴$	$۲, ۳, ۳۶$
۴	$۲, ۵۷, ۳۷$	$۲, ۵۴, ۳۰$	$۲, ۵۱, ۱۶$	$۲, ۴۸, ۴$	$۲, ۴۴, ۴۶$
۵	$۳, ۴۱, ۵۹$	$۳, ۳۸, ۵$	$۳, ۳۴, ۴$	$۳, ۳۰, ۳$	$۳, ۲۵, ۵۶$
۶	$۴, ۲۶, ۲۰$	$۴, ۲۱, ۳۹$	$۴, ۱۶, ۵۱$	$۴, ۱۲, ۱$	$۴, ۷, ۵$
۷	$۵, ۱۰, ۴۱$	$۵, ۵, ۱۳$	$۴, ۵۹, ۳۷$	$۴, ۵۳, ۵۸$	$۴, ۴۸, ۱۳$
۸	$۵, ۵۵, ۱$	$۵, ۴۸, ۴۶$	$۵, ۴۲, ۲۲$	$۵, ۳۵, ۵۴$	$۵, ۲۵, ۲۰$
۹	$۶, ۳۹, ۲۰$	$۶, ۳۲, ۱۸$	$۶, ۲۵, ۶$	$۶, ۱۷, ۵۰$	$۶, ۱۰, ۲۶$
۱۰	$۷, ۲۳, ۳۹$	$۷, ۱۵, ۴۹$	$۷, ۷, ۵۰$	$۶, ۵۹, ۴۵$	$۶, ۵۱, ۳۱$

۸,۷,۵۷	۷,۵۹,۱۹	۷,۵۰,۳۳	۷,۴۱,۳۹	۷,۳۲,۳۵	۱۱
۸,۵۲,۱۴	۸,۴۲,۴۸	۸,۳۳,۱۵	۸,۲۳,۳۲	۸,۱۳,۳۸	۱۲
۹,۳۶,۳۰	۹,۲۶,۱۷	۹,۱۵,۵۶	۹,۵,۲۴	۸,۵۴,۴۱	۱۳
۱۰,۲۰,۴۵	۱۰,۹,۴۵	۹,۵۸,۳۶	۹,۴۷,۱۶	۹,۳۵,۴۳	۱۴
۱۱,۵,۰	۱۰,۵۳,۱۲	۱۰,۴۱,۱۶	۱۰,۲۹,۷	۱۰,۱۶,۴۴	۱۵
۱۱,۴۹,۱۴	۱۱,۳۶,۳۹	۱۱,۲۳,۵۵	۱۱,۱۰,۵۷	۱۰,۵۷,۴۴	۱۶
۱۲,۳۳,۲۷	۱۲,۲۰,۵	۱۲,۶,۳۳	۱۱,۵۲,۴۶	۱۱,۳۸,۴۴	۱۷
۱۳,۱۷,۳۹	۱۳,۳,۳۰	۱۲,۴۹,۱۰	۱۲,۳۴,۳۴	۱۲,۱۹,۴۳	۱۸
۱۴,۱,۵۰	۱۳,۴۶,۵۴	۱۳,۳۱,۴۶	۱۳,۱۶,۲۱	۱۳,۰,۴۱	۱۹
۱۴,۴۶,۰	۱۴,۳۰,۱۷	۱۴,۱۴,۲۱	۱۳,۵۸,۸	۱۳,۴۱,۳۸	۲۰
۱۵,۳۰, ۹	۱۵,۱۳,۳۹	۱۴,۵۶,۵۵	۱۴,۳۹,۵۴	۱۴,۲۲,۳۵	۲۱
۱۶,۱۴,۱۸	۱۵,۵۷,۱	۱۵,۳۹,۲۸	۱۵,۲۱,۳۹	۱۵, ۳,۳۱	۲۲
۱۶,۵۸,۲۶	۱۶,۴۰,۲۲	۱۶,۲۲,۱	۱۶,۳,۲۳	۱۵,۴۱,۲۶	۲۳
۱۷,۴۲,۳۳	۱۷,۲۳,۴۲	۱۷,۴,۳۳	۱۶,۴۵, ۶	۱۶,۲۵,۲۰	۲۴
۱۸,۲۶,۴۰	۱۸,۷,۱	۱۷,۴۷,۳	۱۷,۲۶,۴۹	۱۷,۶,۱۳	۲۵
۱۹,۱۰,۴۶	۱۸,۵۰,۲۰	۱۸,۲۹,۳۴	۱۸,۸,۳۱	۱۷,۴۷, ۵	۲۶
۱۹,۵۴,۵۱	۱۹,۳۳,۳۸	۱۹,۱۲,۴	۱۸,۵۰,۱۲	۱۸,۲۷,۵۶	۲۷
۲۰,۳۸,۵۵	۲۰,۱۶,۵۵	۱۹,۵۴,۳۳	۱۹,۳۱,۵۲	۱۹,۸,۴۶	۲۸
۲۱,۲۲,۵۹	۲۱, ۰,۱۲	۲۰,۳۷,۱	۲۰,۱۳,۳۱	۱۹,۴۹,۳۵ ^۱	۲۹
۲۲,۷,۲	۲۱,۴۳,۲۸	۲۱,۱۹,۲۹	۲۰,۵۵,۹	۲۰,۳۰,۲۴	۳۰
۲۲,۵۱, ۴	۲۲,۲۶,۴۳	۲۲, ۱,۵۶	۲۱,۳۶,۴۶	۲۱,۱۱,۱۲	۳۱
۲۳,۳۵, ۵	۲۳,۹,۵۷	۲۲,۴۴,۲۲	۲۲,۱۸,۲۲	۲۱,۵۱,۵۹	۳۲
۲۴,۱۹, ۶	۲۳,۵۳,۱۰	۲۳,۲۶,۴۷	۲۲,۵۹,۵۸	۲۲,۳۲,۴۵	۳۳
۲۴, ۳, ۶	۲۴,۳۶,۲۲	۲۴, ۹,۱۱	۲۳,۴۱,۳۳	۲۳,۱۳,۳۰	۳۴
۲۵,۴۷, ۵	۲۵,۱۹,۳۴	۲۴,۵۱,۳۴	۲۴,۲۳,۷	۲۳,۵۴,۱۵	۳۵
۲۶,۳۱, ۳	۲۶,۲,۴۵	۲۵,۳۳,۵۶	۲۵,۴,۴۱	۲۴,۳۴,۵۹ ^۲	۳۶
۲۷,۱۵,۰	۲۷,۴۵,۵۵	۲۶,۱۶,۱۷	۲۵,۴۶,۱۴	۲۵,۱۵,۴۲	۳۷
۲۷,۵۸,۵۶	۲۷,۲۹,۴	۲۶,۵۸,۳۸	۲۶,۲۷,۴۶	۲۵,۵۶,۲۴	۳۸
۲۸,۴۲,۵۱	۲۸,۱۲,۱۲	۲۷,۴۰,۵۸	۲۷, ۹,۱۷	۲۶,۳۷,۵	۳۹
۲۹,۲۶,۴۶	۲۸,۵۵,۱۹	۲۸,۲۳,۱۷	۲۷,۵۰,۴۸	۲۷,۱۷,۴۵	۴۰
۳۰,۱۰,۴۰	۲۹,۳۸,۲۵	۲۹,۵,۳۵	۲۸,۳۲,۱۸	۲۷,۵۸,۲۴	۴۱
۳۰,۵۴,۳۳	۳۰,۲۱,۳۱ ^۳	۲۹,۴۷,۵۲	۲۹,۱۳,۴۷	۲۸,۳۹,۲	۴۲
۳۱,۳۸,۲۶	۳۱,۴,۳۶	۳۰,۳۰, ۹	۲۹,۵۵,۱۵	۲۹,۱۹,۴۰	۴۳
۳۲,۲۲,۱۸	۳۱,۴۷,۴۰	۳۱,۱۲,۲۵	۳۰,۳۶,۴۲	۳۰, ۰, ۱۷	۴۴



۱. ۱۹,۴۵,۳۵ (مقدار اصلی در جدول)

۲. ۳۴,۳۴,۳۹ (مقدار اصلی در جدول)

۳. ۳۰,۳۱,۳۱ (مقدار اصلی در جدول)



۳۳,۶,۹	۳۲,۳۰,۴۳	۳۱,۵۴,۴۰	۳۱,۱۸,۸	۳۰,۴۰,۵۳	۴۵
۳۳,۴۹,۵۹	۳۳,۱۲,۴۵	۳۲,۳۶,۵۴	۳۱,۵۹,۳۳	۳۱,۲۱,۲۸	۴۶
۳۴,۳۳,۴۸	۳۳,۵۶,۴۷	۳۳,۱۹,۸	۳۲,۴۰,۵۷	۳۲,۲,۳	۴۷
۳۵,۱۷,۳۷	۳۴,۳۹,۴۸	۳۴,۱,۲۱	۳۳,۲۲,۲۰	۳۲,۴۲,۳۷	۴۸
۳۶,۱,۲۵	۳۵,۲۲,۴۹	۳۴,۴۳,۳۳	۳۴,۳,۴۳	۳۳,۲۳,۱۰	۴۹
۳۶,۴۵,۱۲	۳۶,۵,۴۹	۳۵,۲۵,۴۵	۳۴,۴۵,۵	۳۴,۳,۴۲	۵۰
۳۷,۲۸,۵۸	۳۶,۴۸,۴۸	۳۶,۷,۵۶	۳۵,۲۶,۲۶	۳۴,۴۴,۱۴	۵۱
۳۸,۱۲,۴۳	۳۷,۳۱,۴۶	۳۶,۵۰,۶	۳۶,۷,۴۶	۳۵,۲۴,۴۵	۵۲
۳۸,۵۶,۲۸	۳۸,۱۴,۴۳	۳۷,۳۲,۱۵	۳۶,۴۹,۶	۳۶,۵,۱۵	۵۳
۳۹,۴۰,۱۲	۳۸,۵۷,۴۰	۳۸,۱۴,۲۳	۳۷,۳۰,۲۵	۳۶,۴۵,۴۴	۵۴
۴۰,۲۳,۵۵	۳۹,۴۰,۳۶	۳۸,۵۶,۳۰	۳۸,۱۱,۴۳	۳۷,۲۶,۱۲	۵۵
۴۱,۷,۳۷	۴۰,۲۳,۳۱	۳۹,۳۸,۳۶	۳۸,۵۳,۰	۳۸,۶,۳۹	۵۶
۴۱,۵۱,۱۹	۴۱,۶,۲۵	۴۰,۲۰,۴۱	۳۹,۳۴,۱۶	۳۸,۴۷,۵	۵۷
۴۲,۳۵,۰	۴۱,۴۹,۱۸	۴۱,۲,۴۵	۴۰,۱۵,۳۱	۳۹,۲۷,۳۰	۵۸
۴۳,۱۸,۴۰	۴۲,۳۲,۱۰	۴۱,۴۴,۴۹	۴۰,۵۶,۴۶	۴۰,۷,۵۴	۵۹
۴۴,۲۰,۲۰	۴۳,۱۵,۱	۴۲,۲۶,۵۲	۴۱,۳۸,۰	۴۰,۴۸,۱۸	۶۰

جدول ۲

با جمع کردن این افزایش های تابع، مقدار نهایی به دست می آید:

$$\sin 48;6,43,30^{\circ} = 0;44,40,1,34$$

کاشانی می گوید که روش فوق ساده است، اما روش دقیق تری هم وجود دارد که تنها به یک درونیابی خطی در بازه $(48;6^{\circ} - 48;7^{\circ})$ می انجامد. روش و محاسبات او با استفاده از نمادگذاری ما در زیر خلاصه شده است.

$$\Delta = \sin 48;7^{\circ} - \sin 48;6^{\circ} = 0;0,0,41,57$$

پس

$$\begin{aligned}\sin 48;6,43^{\circ} &= \sin 48;6^{\circ} + 43 \times \Delta / 60 \\ &= 0;44,39,31,18 + 0;0,0,30,4 \\ &= 0;44,40,1,22\end{aligned}$$

و

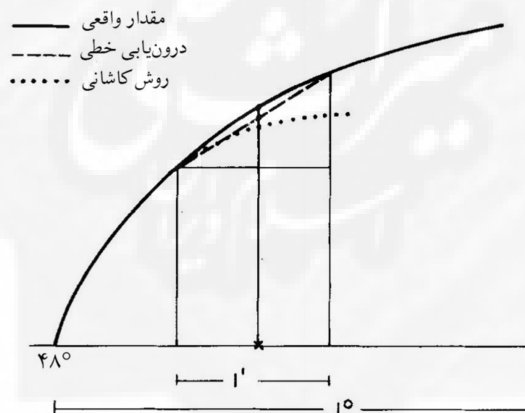
$$\begin{aligned}\sin 48;6,43,30^{\circ} &= \sin 48;6,43^{\circ} + 30 \times \Delta / (60)^2 \\ &= 0;44,40,1,22 + 0;0,0,0,21 \\ &= 0;44,40,1,43\end{aligned}$$

مقدار اخیر تنها در رقم آخر با مقدار محاسبه شده با روش «آسان تر» متفاوت است.

می بینیم که هیچ یک از مقادیر جدول سینوس (و همچنین جدول تانژانت) کاشانی که در زیج خاقانی آمده است، با مقادیر تابع کمان های شامل دقیقه مطابقت ندارد. به عبارت دیگر، برای تعیین

سینوس، مثلاً $48;6^\circ$ ، نخست باید از بالای جدول ۲، سینوس 48° را پیدا کنیم، که مقدار آن $0;44,35,19,17$ است. سپس باید افزایش مربوط به $6'$ را که برابر با $0;0,4,12,1$ است، به آن بیفزاییم تا $0;44,39,31,18$ به عنوان مقدار سینوس $48;6^\circ$ به دست آید.

چرا کاشانی جداول خود را به این شکل پیچیده ساخت؟ شاید پاسخ این باشد که به این ترتیب، داده‌های عددی (یعنی افزایش‌های تابع به ازای هر دقیقه از کمان) در ستون‌هایی با عنوان درجات مربوطه ظاهر می‌شوند تا اعمال قوانین درونیابی خاص او برای تخمین مقادیر مربوط به تابع کمان‌هایی را که شامل ثانیه و ثانیه سوم هستند تسهیل کند. این را می‌توان در مثال بالا مشاهده کرد. این بخش را با عرضه تفسیری هندسی از روش درونیابی آسان‌تر (غیردقیق) کاشانی در سطرهای بعدی به پایان می‌بریم. در واقع، او بخشی از منحنی را در بازه یک درجه‌ای که متغیر داده شده در آن است، در نظر می‌گیرد و آن را در هر دو بعد با ضریب $1:60$ کاهش می‌دهد. اکنون افزایش مربوط به ثانیه‌ها، ارتفاع بخش کاهش یافته در رقم دوم متغیر است. البته این روش تنها برای توابع خطی دقیق است. به طور کلی، درونیابی خطی دقیق‌تر است (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱

برای تصحیح مربوط به ثلثه‌ها، او همان بخش از منحنی را دوباره با همان ضریب کاهش می‌دهد و ارتفاع بخش دو بار تقلیل یافته را در رقم سوم اضافه می‌کند. این روش حتی غیرواقعی‌تر از روش تصحیح اول است. شکل ۱ این روش‌ها را نشان می‌دهد.

۵. جدول تانژانت

جدول تانژانت در برگ‌های ۴۰ تا ۴۲ رزیج خاقانی قرار دارد. این جدول برای هر دقیقه کمان در بازه $(0^\circ \text{ تا } 45^\circ)$ و برای هر پنج دقیقه کمان در بازه $(45^\circ \text{ تا } 89;55^\circ)$ تا چهار رقم شصتگانی

محاسبه شده است. ساختار جدول تانژانت مشابه جدول سینوس است. این نشان می‌دهد که روش‌های درونیابی را که برای کاربرد در جدول سینوس شرح داده شد، در جدول تانژانت هم می‌توان به کار برد، زیرا مقدار عددی مورد نیاز (یعنی افزایش‌های تابع به ازای دقایق کمان) در همان قالب جدول سینوس عرضه شده‌اند. علاوه بر این، مقادیر تانژانت برای هر درجه قوس نیز تا پنج رقم شصتگانی در بخش اول برگ ۴۱ پ آمده است.

در برگ ۲۷، سطرهای ۱۱ تا ۲۰، بخش کوتاهی با عنوان «در تعیین ظل اول (و) دوم» (یعنی تانژانت و کتانژانت) وجود دارد. چند سطر آخر این بخش مربوط به جدول تانژانت منبع، در زیر آمده است. ... و چون ظل اول اجزایی که از ثمن دور زیادت باشد، اضعاف نصف قطر است و تفاضلات آن بسیار است و متزاید، در اعمال نجومی بر ایراد اظلال ثمنی از دور اختصار کنند و ما آن را هم بر منوال جیب اینجا آوردیم و اظلال قوس‌هایی که از ثمن زیادت باشد تا ربع بر تزاید پنج پنج دقیقه بنهادیم.

در نسخه خطی دیده می‌شود که در بازه $(89;55^\circ \text{ تا } 89;50^\circ)$ ، بخشی از ستون‌های برگ‌های ۴۱ پ و ۴۲ ر مربوط به مقادیر ۵، ۲۵، ۳۵ و ۵۵ دقیقه، خالی مانده‌اند. شاید کاشانی ابتدا تانژانت‌های مربوط به هر ده دقیقه کمان از $89;50^\circ$ تا $89;50^\circ$ را تعیین کرده و سپس مقادیر را برای هر پنج دقیقه تقریب زده است.

۶. رونویسی جداول و دقت آنها

ما جداول مثلثاتی منبع را رونویسی و اختلافات اول و دوم مقادیر آنها را محاسبه کرده‌ایم. برای تعیین میزان دقت این جداول، مقادیر جدول کاشانی برای هر درجه کمان را (که در بالای جداول آمده است) به اعداد دهدهی تبدیل، سپس آنها را با مقادیر دقیق شناخته شده مقایسه کرده‌ایم. این مقایسه نشان می‌دهد که مقادیر او تا شش رقم دهدهی صحیح است.

نقل بازنویسی این جداول در اینجا فایده‌چندانی ندارد. این جدول‌ها تحت تأثیر جداول موجود در زیج الغ بیگ (ح ۸۴۴ ق) بودند که دارای جدول سینوسی است که برای هر دقیقه کمان تا پنج رقم شصتگانی محاسبه شده است. جمشید کاشانی نیز از جمله منجمانی بود که زیج الغ بیگ را تهیه کردند [کندی ۱۹۵۶].

منابع

- India Office Library MS Persian 430 (Ethé 2232), London. Ff. 26^v-27^r and 35^v-42^r.
 Kennedy, E. S. 1956. "A survey of Islamic astronomical tables", *Transactions of the American Philosophical Society*, N. S. 42: 2, pp. 123-177;
 ترجمه فارسی: پژوهشی در زیج‌های دوره اسلامی، ترجمه محمد باقری، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۴؛
 1969. The history of trigonometry: an overview. In *Historical topics for the mathematics classroom*, pp. 333-359. Thirty-first Yearbook. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستعين
 حمد و سپاس به قیاس حضرت خالق را که بیدار ابدی است
 و قدرت این طایفه رفیع مطبق خضر را محبط این کیده بعلق
 غبار گردانید و این دریائی پر بهنای بی پایان عنصر آب را که
 محبط کوئی کران خالی است به ستوفی و علاقه بر هوا بداشت
 و بکمال صنع به چوئی و فرمان امر کن و کونی سقوف
 این ایوان اعلی و سطوح این عالم بالا بخندین هزار در و لایق
 مستدیره لایق و زواهد ثواب مستند به شهبلا منضد و مرصع
 گردانید **فتبارک الله احسن الخالقین** و وفود
 دروژ و صلات صلوات نثار مرقد مطهر و روضه مقدس
 مهتر کونین و سرور تفلین مرکز ابره نبوت قطب فلک رسالت
 ماه شب اسری آفتاب روز و الفصحی **حمد مصطفی**
 و آل و اصحاب او که منوره باع سادت و ریاضین بساتین سعادت
 اند بآدم **حمد** خسر کوید مولف این کات اقل عباد
 الله تعالی جمشید بن مسعود بن محمود الطیب الکافی الملقب بغیاث
 احسن الله احواله که مدتی بود که در اقسام علمی ریاضات اخلاقی
 نمود و در استکشاف زخات تامل می کرد و در هر عمل نکته لطیف
 و مخبیه شریف دست می داد و در هر باب اختراع جد و استنطاق
 مساند اتفاق می افتاد تا حوز ساری جمع شد داعیه
 باعث گشت که زبانی وضع کند و حسمع آن فوائد دیان مندرج
 گردانند باین بوضع این زنج مشغول شد و تا غاسر در بلاد عراق
 می بود و آنرا اوقات در کاشانه کاشان می روی بود و حوز دیار نواحی
 لی که راحه عود سور این فن دقیق جلیل بشام جان او رسیده باشد نبود
 آنرا اظهار نمی کرد و در انام آن مطلق می رفت و از حضرت در آنرا
 حوای کربا اخلاقه دیبا جتی و ابوح الدجج جتی می بود و در کار بی عمل

تصویر برگ ۱۰۱ نسخه ایاصوفیای زیج خاقانی (شماره ۲۶۹۲)

جدول جیب

درج	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰	
۱	۱۰۰	۹۹	۹۸	۹۷	۹۶	۹۵	۹۴	۹۳	۹۲	۹۱	۹۰	۸۹	۸۸	۸۷	۸۶	۸۵	۸۴	۸۳	۸۲	۸۱	۸۰	۷۹	۷۸	۷۷	۷۶	۷۵	۷۴	۷۳	۷۲	۷۱	۷۰	۶۹	۶۸	۶۷	۶۶	۶۵	۶۴	۶۳	۶۲	۶۱	۶۰	۵۹	۵۸	۵۷	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳	۵۲	۵۱	۵۰	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵	۴۴	۴۳	۴۲	۴۱	۴۰	۳۹	۳۸	۳۷	۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

تصویر برگ ۳۱ پ نسخه ایاصوفیای زیج خاقانی (شماره ۲۶۹۲)