استخراج کن، و از حاصل جذر نصف عدد اشیاء را کم کن و باقیمانده را بر عدد اموال تقسـیم کـن؛ آنچه از این اعمال حاصل شود، جذر مال است.

$$x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + ac} - \frac{1}{2}b\right]$$

مثال: سه مال و ده شئ معادل سی و دو درهم است.

$$3x^2 + 10x = 32$$

عدد اشیاء را نصف کرده و آن را در خودش ضرب کن تا بیست و پنج به دست آید. آن را به آنچـه از ضرب سی و دو در سه، که عدد اموال است، حاصل می‌شود، اضافه کن تـا صـد و بیسـت و یـک حاصل شود. جذر آن را استخراج کن، و از آن نصف عدد اشیاء را کم کن، باقی می‌ماند شـش. آن را بر سه، که عدد اموال است، تقسیم کن؛ دو به دست می‌آید که جذر مال است.

این روش در همهٔ مسئله‌های شامل کسرهای گوناگون آسان‌تـر اسـت، زیـرا کـار بـا ایـن اجـزاء[۱] مشکل است.

اگر کسی بگوید: یک سوم و یک چهارم مال و دو شئ معادل سی و سه درهم است:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^2 + 2x = 33$$

عدد اشیاء را نصف کن، تا یک شود. آن را در خودش ضرب کن، و آن را به آنچـه از ضـرب یـک سوم و یک چهارم در سی و سه حاصل می‌شود، اضافه کن تا بیست و یک چهارم حاصل شود. جذر آن را استخراج کن، تا چهار و یک دوم شود. نصف عدد اشیاء را از آن کم کن، سـه و یـک دوم بـاقی می‌ماند. آن را بر یک سوم و یک چهارم تقسیم کن، شش به دست می‌آید که جذر مال است.

(۳) این مسئله می‌تواند به روش دیگری حل شود، چنان که پیش از یافتن جذر، مـال بـه دسـت آید. روش عمل چنین است که بعد از ردّ و تکمیل، عدد اشیاء را در خودش ضرب مـی‌کنـی. سـپس حاصل را در عدد ضرب می‌کنی و آن را به خاطر می‌سپاری. پس از آن نصف مربع عدد اشـیاء را در خودش ضرب و آن را به عدد محفوظ اضافه می‌کنی. و جذر حاصل را از مجموع عددی کـه معـادل اموال و اشیاء بود و نصف مربع عدد اشیاء، کم می‌کنی. آنچه از این حاصل شود، مقدار مال است و جذر آن جذر مال است.

۱. در بیان کسرها، به صورت چند جزء از اجزاء مخرج از واحد گفته می‌شد، مثلاً کسر «سه یازدهم» چنین توصیف می‌شد: سه جزء از یازده جزء از واحد.

$$x^2 + bc = c \rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{2}b^2 + c\right) - \sqrt{b^2c + \left(\frac{1}{2}b^2\right)^2}$$

مثال: یک مال و پنج شئ معادل بیست و چهار درهم است:

$$x^2 + 5x = 24$$

پنج را در پنج و سپس در بیست و چهار ضرب کن تا حاصل ششصد شود. آن را در خاطر نگه دار. سپس نصف مربع پنج را، که دوازده و یک دوم است، در خودش ضرب کن تا صد و پنجاه و شش و یک چهارم حاصل شود. آن را به عددی که در خاطر داشتی، اضافه کن. حاصل هفتصد و پنجاه و شش و یک چهارم می‌شود. جذر آن را استخراج کن، بیست و هفت و یک دوم می‌شود. آن را به خاطر بسپار. سپس عدد را، که بیست و چهار است، با نصف مربع عدد اشیاء، که دوازده و یک دوم است جمع کن؛ حاصل سی و شش و یک دوم می‌شود. اکنون از این آن‌چه را که در خاطر داشتی، یعنی بیست و هفت و یک دوم کم کن؛ باقی می‌ماند نُه که مال است و جذر آن که سه است، جذر مال است.

اثبات قاعده‌ها به همان ترتیب عرضه شده است. تنها نوآوری در مقایسه با روش ابوکامل در اثبات (۱) آن است که ابوکامل برای توصیف مال مربع رسم می‌کند در حالی که نمودار کرجی یک خط راست است.[۱]

من در این کتاب تصمیم گرفتم تا از اثبات‌ها، توضیحات طولانی و مثال‌های بیشمار پرهیز کنم.[۲] اما نمی‌توانم از عرضهٔ شرح مختصری از اثبات‌ها برای مسائل مرتبط[۳] و دلایل نصف کردن عدد اشیاء و آنچه که در رابطهٔ با آن‌هاست،[۴] چشم‌پوشی کنم.

پس برای این مورد داریم: یک مال و ده شئ معادل سی و نه واحد است [$x^2 + 10x = 39$].

روش به دست آوردن جواب این است: نصف عدد اشیاء را در خودش ضرب کن و آن را به عدد بیفزا و جذر آن را استخراج کن و از حاصل نصف عدد اشیاء را کم کن.

اثباتش چنین است: خط BG را یک شئ فرض می‌کنیم. و خط AB را ده واحد می‌گیریم و آن را در نقطهٔ D به دو نیمه تقسیم می‌کنیم و آن را به اندازهٔ خط BG امتداد می‌دهیم. می‌دانی که اگر خطی توسط خط دیگری بسط داده شود و سپس آن خط و بسط آن در بسط ضرب شود و به آن مربع نصف آن خط اضافه شود، حاصل مساحت مربعی است که روی همهٔ نصف خط با بسط آن بنا

۱. ریاضیدانان پیش از کرجی، مانند خوارزمی، ابن ترک، ثابت بن قره و نعیم بن محمد بن موسی، در اثبات‌های خود، برای نشان دادن مال، مربع رسم می‌کردند. شاید کرجی مال را با پاره‌خط نشان داد تا از بعد دوم برای نمایش تعداد مال‌ها در (۲) استفاده کند.

۲. این انتقادی تلویحی از ابوکامل است که در کتابش ۵۰ اثبات از جمله ۱۵ اثبات برای دستورهای حل معادلات درجهٔ دوم آورده است.

۳. یعنی معادلات درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای.

۴. یعنی ادامهٔ الگوریتم.

می‌شود. پس در این مسئله خط AB به اندازهٔ خط BG بسط داده شده است. حاصل‌ضرب همهٔ خط AG در خط BG و حاصل‌ضرب خط BD در خودش مساوی است با حاصل‌ضرب خط DG در خودش. اقلیدس این را در کتاب اصول نشان داده است.[۱] ما می‌دانیم که خط AB برابر با ده است و خط BG جذر مال است و اگر همهٔ خط AB را در خط BG ضرب کنیم، سی و نه می‌شود که معادل با مال و ده شئ است. پس اگر به این خط، مجذور DB را، که پنج است، اضافه کنیم، شصت و چهار می‌شود که یک ریشهٔ آن خط DG است. پس خط DG معلوم و برابر با هشت است. و خط DB برابر با پنج است، پس خط باقیماندهٔ BG برابر با سه است که جذر مال است؛ پس مال نه است. و این شکل آن است:

و اگر کسی بگوید: سه مال و شش شئ معادل بیست و چهار واحد است: [$3x^2+6x=24$] و بخواهی آن شئ را، بدون ردّ مال به یک مال، بیابی، باید خط BG را برابر با سه شئ و خط AB را برابر با شش فرض کنی و در نقطهٔ G خط DG را مساوی با خط BG به آن الحاق کنی[۲] و خط HT را موازی با خط BG و خط UY را موازی و هم‌راستا با آن رسم کنی به طوری که هر یک از قسمت‌های خط DG جذر مال باشد. بنابراین حاصل‌ضرب خط AG در GH سه مال و شش شئ است، چون که آن حاصل‌ضرب شش و سه شئ در یک شئ است که برابر با سطح AH است. اما سه مال و شش شئ معادل بیست و چهار واحد است؛ پس تمام سطح AD، یعنی کل سطح، هفتاد و دو است؛ که از ضرب AG در خط GD حاصل می‌شود. اما خط GD مساوی با خط BG است، پس همهٔ خط AG در خط BG برابر با هفتاد و دو است.

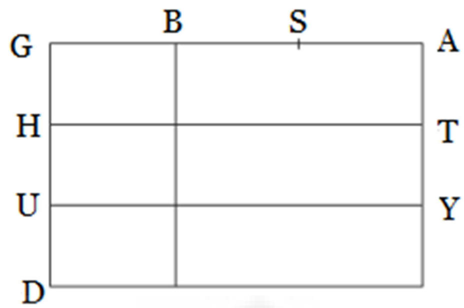
اکنون خط AB را، که شش است، در نقطهٔ S به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم تا خط SB برابر با سه شود. آن را در خودش ضرب می‌کنیم تا نه به دست آید. اگر همهٔ اینها را به حاصل‌ضرب خط AG در BG، که هفتاد و دو است، اضافه کنیم، نتیجه هشتاد و یک می‌شود. و جذر آن نه می‌شود که مساوی با خط SG است.[۳] اما خط SB برابر با سه است. با کم کردن آن، خط BG برابر با شش می‌شود. و چون خط BG را برابر با سه شئ گرفته بودیم، پس مقدار هر ریشه دو می‌شود و این شکل آن است:

---

۱. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.

۲ توجه کنید که مقیاس طول در راستاهای افقی و عمودی یکسان نیست. م

۳. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.



و اگر کسری از مال و شئ معادل با یک عدد بود، مانند نصف مال و دو شئ معادل با شش درهم $\left[\frac{1}{2}x^2+2x=6\right]$ و بخواهی مقدار شئ را، بدون کامل کردن مال بیابی، خط AB را برابر با نصف شئ و خط BD را برابر با دو و خط AY را برابر با جذر مال رسم کن.[۱] پس حاصل‌ضرب خط AY در خط AD مساوی نصف مال و دو شئ است؛ زیرا آن از حاصل‌ضرب یک شئ در نصف یک شئ و دو حاصل شده، یعنی:

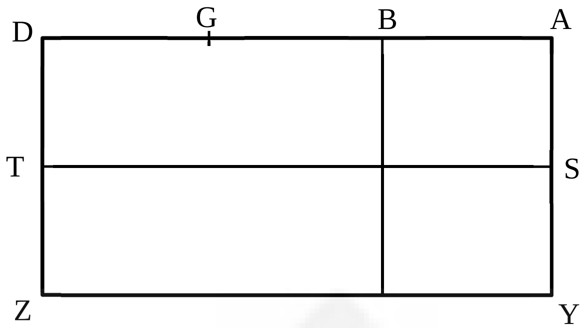
$$x\left(\frac{1}{2}x+2\right)$$

بنابراین همهٔ سطح AZ نصف مال است و دو شئ که برابر با شش واحد است؛ زیرا نصف مال و دو شئ مساوی با شش بوده است.

پس اگر خط AY را در نقطهٔ S به دو قسمت مساوی تقسیم کنی و خط ST را موازی با خط AD رسم کنی، آنگاه سطح SD برابر با سه است؛ زیرا نصف سطح بزرگتر است که از ضرب AD در AS حاصل شده است. اما AS مساوی با AB است؛ پس [حاصل‌ضرب] همهٔ خط DA در AB برابر با سه است.

اکنون باید خط BD را در نقطهٔ G به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم. AB بسط خط BD است. پس حاصل‌ضرب AD در AB، که سه است، با حاصل‌ضرب BG در خودش، که یک است، روی هم چهار می‌شود که مساوی با حاصل‌ضرب خط AG در خودش است.[۲] پس خط AG برابر با دو است. اما خط BG یک است، پس خط AB نیز یک است. و چون این نصف شئ است، پس تمام شئ برابر با دو است که جذر مال است و این شکل آن است:

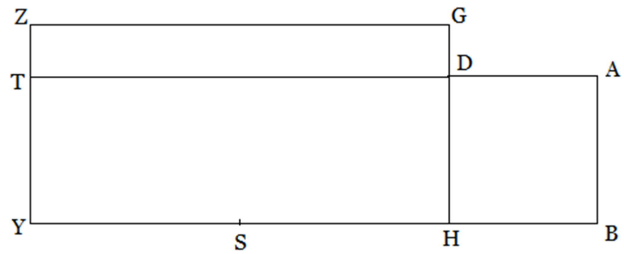
۱. در اینجا هم مقیاس طول در راستاهای افقی و عمودی یکسان نیست. م
۲. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.



و اگر یک مال و ده شئ معادل سی و نه واحد باشد [$x^2+10x=39$]. و بخواهی مال را بیابی، خط GD را یک مال و خط DH را ده شئ در نظر بگیر. پس همهٔ خط GH سی و نه واحد است. خط DA را مساوی با خط DH رسم کن و روی آن مربع DB را بنا کن و آن به صد مال تقسیم می‌شود، زیرا اگر ده جذر چیزی در خودش ضرب شود، صد برابر همان چیز حاصل می‌شود. و سطح GT را مساوی با سطح DB بنا می‌کنیم. پس سطح GT نیز به صد مال تقسیم می‌شود. چون خط GD یک مال است، خط DT برابر با صد، و همهٔ سطح GY سه هزار و نهصد است، چون از ضرب خط GH، که سی و نه است، در GZ، که صد است، حاصل شده است. به همین ترتیب همهٔ سطح TB برابر با سه هزار و نهصد می‌شود، زیرا سطح GT مساوی با سطح DB است. اما سطح TB از ضرب خط YB در خط HD که مساوی با خط AB است حاصل شده است.

پس HY را در نقطهٔ S به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و می‌گوییم که حاصل‌ضرب خط YB در BA است، که سه هزار و نهصد است، با حاصل‌ضرب HS در خودش، که دو هزار و پانصد است، روی هم شش هزار و چهار صد می‌شود؛ که با شرایطی که قبلاً گفته شد[1]، مساوی با حاصل‌ضرب خط BS در خودش است. پس خط BS برابر با هشتاد است. اما خط DH مساوی با خط HB است، پس مجموع خط DH و HS هشتاد است. اما خط HS پنجاه است، پس خط باقیماندهٔ DH سی است. و خط GH سی و نه بود؛ پس خط GD برابر با نه است که مال است. و این شکل آن است:

۱. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.



(۴) و اگر بخواهی جذر مال را به روش مورد استفادهٔ دیوفانتوس، برای معادلهٔ $x^2+10x=39$ بیابی، باید دنبال عددی بگردی که اگر آن را به مال و ده شئ [x^2+10x] اضافه کنی جذر داشته باشد. آن عدد چیزی نیست بجز بیست و پنج که اگر آن را به یک مال و ده شئ اضافه کنی، یک ریشه دارد و آن شئ و پنج درهم است: $x+5$. و می‌دانی که یک مال و ده شئ برابر با سی و نه واحد است:

$$x^2+10x=39$$

پس اگر مال و ده شئ را حذف کنی و به جای آن عدد سی و نه را قرار دهی؛ حاصل شصت و چهار می‌شود که جذر آن هشت است و آن مساوی یک شئ و پنج درهم است. پس شئ مساوی سه درهم است که جذر مال است.

در «روش مورد استفادهٔ دیوفانتوس» کرجی مشاهده می‌کند که اگر ۲۵ به x^2+10x اضافه شود، مجموع یک ریشه خواهد داشت که $x+5$ است. به عبارت دیگر

$$(x+5)^2 \to x^2+10x+25$$

با جاگذاری سی و نه به جای x^2+10x که مساوی با آن است، نتیجه می‌شود:

$$(x+5)^2 \to 64$$

و جذر ۶۴ برابر با هشت است که مساوی با $x+5$ است. کار در چارچوب ضرب $x+5$ در خودش انجام می‌شود بدون متنی راجع به ضرب $x+5$ در خودش و معادله با جاگذاری سی و نه به جای x^2+10x حل می‌شود.

برای معادلهٔ درجهٔ دوم نوع دوم

$$ax^2+c=bx$$

کرجی همان الگو را دنبال می‌کند. او قاعده‌ای عرضه می‌کند با مثال‌هایی برای (۱)، (۲) و (۳) و سپس آن‌ها را به همان ترتیب اثبات می‌کند. سپس دوباره با روش دیوفانتوس و این بار با معادلهٔ $x^2+21=10x$ کار را به پایان می‌رساند.

(۴) و اگر بخواهی این مسئله را بر طبق روش دیوفانتوس حل کنی، باید به دنبال یک مربع بگردی که اگر کم کنی از آن [و یک عدد] ده شئ را، که معادل با مال و بیست و یک واحد است، باقیمانده یک مربع باشد. پس ضلع مربع را یک شئ بجز پنج، $x-5$ ، یا پنج بجز یک شئ، $5-x$ ، بگیر. و هر یک از آن‌ها منجر به یک کمیت از آحاد می‌شود. این کمیت مال است و بیست و پنج واحد بجز ده شئ:

$$x^2+25-10x$$

به جای ده شئ، یک مال و بیست و یک واحد را قرار بده، زیرا با هم مساویند. پس چهار باقی می‌ماند که جذر آن دو است. پس اگر پنج بجز شئ گرفته باشی که برابر با دو شده، پس شئ برابر با سه می‌شود. و اگر شئ بجز پنج گرفته باشی که برابر با دو شده، پس شئ برابر با هفت می‌شود.

در اینجا $(x-5)^2$ و $(5-x)^2$ هر دو منجر به $x^2+25-10x$ می‌شود. چون $x^2+21=10x$ است، می‌توانیم جملهٔ $10x$ در عبارت $x^2+25-10x$ را با x^2+21 جایگزین کنیم تا منجر به

$$x^2+25-(x^2+21)\to 4$$

شود. پس دو جواب از $(x-5)^2\to 4$ و $(5-x)^2\to 4$ نتیجه می‌شوند.

برای معادلهٔ درجهٔ دوم نوع سوم $ax^2=bx+c$ دوباره همان الگو دنبال می‌شود؛ بجز آن‌که دو بخش نادیده گرفته می‌شود: قاعده و مثال‌ها برای حل معادلات نابهنجار (۲) و «روش دیوفانتوس» (۴). اما اثبات‌های (۲) عرضه می‌شود؛ پس کرجی باید در اصل قاعده و مثال‌های آن را آورده باشد؛ اما این‌ها، در مرحله‌ای ضمن بازنویسی متن حذف شده است. این نشان می‌دهد که احتمالاً «روش دیوفانتوس» برای معادلات درجهٔ دوم نوع سوم نیز به همین سرنوشت دچار شده است.

کرجی برای قاعده‌های (۱)، (۲) و (۳) طبق معمول ابتدا قاعده و سپس اثبات جداگانه را می‌آورد. گرچه «روش دیوفانتوس» بیش از آن‌که یک روش مجزا باشد، نتیجه‌ای از قاعدهٔ (۱) است، لذا مستلزم اثبات جداگانه‌ای نیست؛ زیرا مراحل کار در طول مسیر توجیه می‌شود. در مقایسه، ثابت بن قره در اواخر قرن سوم هجری قاعده‌ها و اثبات‌ها را به طور مشابه در رساله‌ای منفرد به نام قول في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية گرد آورده است. وی در آنجا قاعدهٔ (۱) را برای حل سه معادلهٔ درجهٔ دوم بهنجار از طریق ترسیم‌های هندسی با تکیه بر قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس استخراج کرده است. او در عنوان اثر آن‌ها را «براهین» اما در متن خود آن‌ها را «راه‌حل‌ها» می‌نامد. مانند «روش دیوفانتوس» کرجی، قاعده‌ها در آغاز عرضه نمی‌شوند، بلکه طی عملیات (در اینجا ترسیم) که آن‌ها را نیز توجیه می‌کنند ظاهر می‌شوند. مقاله چنین آغاز می‌شود:

«اصل اول این است: یک مال و اشیاء معادل عدد است [$x^2 + bx = c$]. راه‌حل این مسئله بر مبنای قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس، به صورتی است که من توصیف می‌کنم. فرض کنید مال مربع ABCD باشد و ... .»

۷. راه‌حل‌هایی برای معادلات درجهٔ دوم در مسائل کرجی

مسائلی که کرجی در الفخري آورده همه از مقالات اول تا چهارم کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس گرفته شده است؛ بنابراین هیچ‌یک از آن‌ها نشانی از معادلات درجهٔ دوم ندارند. اما در میان حدود ۱۵۰ مسئلهٔ جبر دورهٔ اسلامی در این کتاب و چند مسئلهٔ حل شده در کتاب الكافي؛ کرجی تا ۲۲ بار معادلات درجهٔ دوم نابهنجار را حل کرده است. او در هر نمونه روش متعارف جبردانان مسلمان (روش ۱) را دنبال می‌کند که عبارت است از به کاربردن عمل ردّ و تکمیل برای آنکه مال‌ها را به یک مال تبدیل کند. او در هیچ کجای این کتاب‌ها قاعدهٔ (۲) را برای معادلات نابهنجار یا پیداکردن مستقیم مال (قاعدهٔ ۳) یا روش دیوفانتوس (قاعدهٔ ۴) را به کار نمی‌برد.

اما کرجی در دو مورد در البديع في الحساب قاعدهٔ (۲) را برای معادلات نابهنجار به کار می‌برد. او به عنوان بخشی از دستور کار خود در مورد چگونگی حل معادلات نامعین، توضیح می‌دهد که چگونه هنگام تنظیم معادلات، مربع مناسب را برای تضمین یک جواب گویا انتخاب کنید. این قاعده در مواردی برای حل معادلهٔ «مجموع یا تفاضل مکعبات و اشیاء مساوی با مربعات است»، به کار می‌رود.[۱]

پس اگر کسی بگوید: سه مکعب و پنج شئ معادل با یک مربع است، تو آن را با مال مقابله کن، به طوری که اگر عدد آن را نصف کنی و آن را در خودش ضرب کنی و آن را از آنچه از ضرب عدد در عدد کعب‌ها در عدد اشیاء حاصل می‌شود کم کنی، باقیمانده یک مربع باشد. پس در مورد «سه کعب و پنج شئ معادل است با شانزده مال» [$3x^3 + 5x = 16x^2$] شانزده را نصف کن و آن نصف را مربع کن و از آن پانزده را، که از ضرب سه در پنج حاصل می‌شود، کم کن؛ باقی می‌ماند چهل و نه. جذر آن را استخراج کن، که هفت است. به آن نصف مربع‌ها را اضافه کن، پانزده می‌شود. آن را بر عدد کعب‌ها، که سه است، تقسیم کن، پنج حاصل می‌شود که ضلع آن مکعب است. و اگر خواستی، با کم کردن عمل کن تا جذر مال (ریشهٔ دیگر معادله) را به دست آوری که یک سوم واحد است.

با نمادهای امروزی دو راه‌حل معادلهٔ $ax^2 + c = bx$ عبارت است از:

---

۱. کرجی در اینجا جمله‌ها را به شئ تقسیم نمی‌کند که به معادلهٔ درجهٔ دوم برسد.

$$x = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - ac}\right]$$

پس اگر کسی بگوید «سه کعب بجز سه شئ و یک سوم شئ معادل یک مربع است»، مقابله کن آن را با نُه مال

$$3x^3 - 3\frac{1}{3}x = 9x^2$$

پس ریشهٔ نتیجه شده سه و یک سوم واحد است.

$$x = 3\frac{1}{3}$$

و برای این قاعده، اگر کعب‌ها از اشیاء کم شوند، مثل اینکه «سه شئ و یک سوم شئ منهای سه کعب است»، مقابله کن آن را با نه مال:

$$3\frac{1}{3}x - 3x^3 = 9x^2$$

در این صورت می‌توانی آن را بدین شکل بازنویسی کنی که «سه کعب و نه مال معادل سه و یک سوم شئ می‌شود» [$3\frac{1}{3}x = 3x^3 + 9x^2$] پس عدد اموال را نصف و آن را مربع کن و به آن حاصل‌ضرب عدد کعب‌ها در عدد اشیاء، یعنی ده، را اضافه کن؛ تا سی و یک چهارم ($30\frac{1}{4}$) واحد به دست آید. جذر آن بجز نصف عدد اجذار، برابر با یک است.[1] آن را بر عدد کعب‌ها تقسیم کن، نتیجه آنکه ریشه، یک سوم واحد می‌شود، که جواب است.

با نمادهای امروزی این جواب معادلهٔ $ax^2 + bx = c$ عبارت است از:

$$x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + ac} - \frac{1}{2}b\right]$$

جستجو برای مربع مناسب در این شرایط یک مشکل عمدهٔ روش دیوفانتوس است[2]. روش حل، بدون بهنجار کردن معادله، دقیقاً روشی است که خود دیوفانتوس به کار برده است. از آنجا که کرجی قاعدهٔ متعارف جبر دورهٔ اسلامی را در همهٔ موارد دیگر در کتاب‌های خود به کار برده، بی‌شک این روش را از اریثمتیکای دیوفانتوس گرفته است. بنابراین به طور بالقوه هر دو قاعدهٔ (۲) و (۴) برگرفته از دیوفانتوس است.

---

۱. یعنی $\sqrt{30\frac{1}{4}} - 4\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 1$

۲. این نوع از مسائل، با کعب‌ها و اعداد، در مسائل نامعین جبر دورهٔ اسلامی قبل از کرجی یافت نمی‌شود.

۸. اثبات‌های کرجی در کتاب *علل حساب الجبر والمقابلة*

کرجی رسالهٔ علل حساب الجبر والمقابلة وشرحها والبراهین علیه را بعد از الفخري نوشته است. او در این رساله می‌گوید کسانی در درک هندسی اثبات‌های او مشکل داشته‌اند، بنابراین در این رساله چند قضیه را از طریق محاسبه اثبات می‌کند. این‌ها شامل اثبات راه‌حل‌های معادلات از نوع $ax^2 = bx$ و سه نوع معادلهٔ درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای است و نیز قواعدی برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم رادیکال‌ها است.

روش استدلال در اثبات چگونگی حل معادلات درجهٔ دوم همان روش دیوفانتوس به کار رفته در الفخري است. اما در اینجا به جای استخراج راه‌حل معادلات، «علل» یا براهین قواعد متعارف جبر دورهٔ اسلامی (۱) بعد از بهنجارسازی معادلات آورده می‌شود. در اینجا ابتدا هر قاعده تبیین و سپس اثبات می‌شود. این رساله نشان می‌دهد چگونه «روش» [متعارف جبر دورهٔ اسلامی] برای نوع سوم، که در الفخري نیامده بود، به کار می‌آید.

اولین مسئلهٔ در مورد نصف کردن اجذار: $\left[x^2 + bx = c \rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + c} - \frac{1}{2}b\right]$

اگر می‌خواهی دلیل این گفته را نشان دهی، در مسئلهٔ اول، که مال و اشیاء معادل عدد است، راه‌حل این است: عدد اشیاء را نصف کن و آن را در خودش ضرب کن و به آن تمام عدد را، که مساوی مال و اشیاء است، اضافه کن؛ سپس جذر مجموع را استخراج کن؛ و از آن نصف عدد اشیاء را کم کن؛ آنچه باقی می‌ماند جذر مال مذکور است.

فرض کن یک مال و ده شئ معادل بیست و چهار درهم باشد $[x^2 + 10x = 24]$:

اکنون خواستار همخوانی بین اشیاء و اعداد هستیم. به اشیاء همان عدد نصف اشیاء، را که پنج است، اضافه می‌کنم؛ زیرا در این اولین مسئله، چنان که قبلاً توضیح دادم، در نظر گرفتن یک شئ و پنج عدد، $x + 5$، آمده است. پس این را در خودش ضرب می‌کنیم تا یک مال و ده شئ و بیست و پنج درهم به دست آید $\left[(x+5)^2 \rightarrow x^2 + 10x + 25\right]$. قبلاً مال و ده شئ معادل با بیست و چهار درهم را داشتیم. پس اگر بیست و چهار را در این ضرب به جای مال و ده شئ قرار دهیم، ضرب یک شئ و پنج در خودش چهل و نه می‌شود $[(x+5)^2 \rightarrow 49]$. پس جذر چهل و نه، که هفت است، برابر با شئ و پنج است. پنج را از آن کم می‌کنم، دو باقی می‌ماند که جذر مال است و مال چهار است و ده شئ برابر با بیست است. اگر آن‌ها را به هم اضافه کنی، بیست و چهار می‌شود. پس این قاعده در قلمرو عدد به درستی اثبات شده است. حال اگر این مسئله بدون تغییر بود بجز آن‌که مال و شئ معادل یک عدد بزرگتر از بیست و چهار بود به طوری که مجموع، عددی با جذر گویا نبود،

می‌گوییم که جذر آن عدد را از پنج کم کن تا جذر مال باشد. مثلاً اگر گفته شود: یک مال و ده شـئ معادل سی درهم است [$x^2 + 10x = 30$]، سی را به بیست و پـنج اضـافه مـی‌کنـیم، پنجـاه و پـنج می‌شود. می‌گوییم که چون از جذر پنجاه و پنج عدد پنج کم شود، حاصل [$\sqrt{55} - 5$]، جذر مـال خواسته شده است. این قاعده‌ای برای استخراج جواب این نوع معادلات است.

دومین مسئله در نصف کردن اجذار $\left[x^2 + c = bx \rightarrow x = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\right]$

این است دلیلی که در مسئلهٔ دوم گفتیم که راه‌حل این اسـت: عـدد اشـیاء را نصـف کـن و آن را در خودش ضرب کن و از آن عددی را که با اموال است کم کن، سپس جذر باقیمانـده را اسـتخراج و آن را از نصف عدد اشیاء بکاه یا به آن بیفزا. آنچه بعد از جمع یا تفریق حاصل می‌شود، جذر مال است.

فرض کنید بگویم: یک مال و شانزده درهم معادل ده شئ است [$x^2 + 16 = 10x$]. می‌خـواهیم بین اشیاء و اعداد همخوانی ایجاد کنیم. یک ریشهٔ مال را پیدا کردیم که در آنجا نصـف عـدد اشـیاء کاسته می‌شد یا اینکه شئ از نصف عدد اشیاء، که پنج است، کم می‌شد. پس نتیجه شئ بجز پـنج، [$x - 5$]، یا پنج بجز شئ [$5 - x$] است. اکنون این را در خودش ضرب مـی‌کنـیم تـا یـک مـال و بیست و پنج بجز ده شئ [$x^2 + 25 - 10x$] به دست آید. می‌دانیم کـه ده شـئ برابـر بـا یـک مـال و شانزده درهم است. پس اگر از مال و بیست و پنج، ده شـئ را کـه بـا یـک مـال و شـانزده جـایگزین می‌شود، کم کنیم؛ باقی می‌ماند، نُه [$x^2 + 25 - (x^2 + 16) \rightarrow 9$].

پس یک ریشهٔ نُه، که سه است، در خودش ضرب می‌شود. اگر ما آن را شـئ بجـز پـنج بگیـریم، شئ هشت می‌شود؛ زیرا که شئ بجز پنج نتیجه‌اش سه است. و اگر پنج بجز شـئ بگیـریم، شـئ دو می‌شود. پس نتیجه در هر دو صورت ریشهٔ خواسته شده است.

اکنون اگر آن را هشت بگیری، مال شصت و چهار می‌شود. و اگر به آن شانزده را بیفزایی، هشـتاد می‌شود؛ که مساوی ده برابر ریشه، یعنـی هشـت، اسـت. و اگـر آن را دو بگیـری، پـس مـال چهـار می‌شود. پس اگر به آن شانزده را اضافه کنی، بیست می‌شود که همان ده برابر ریشه، یعنی دو، است.

[او بعداً در مورد چگونگی انتخاب بین جمع و تفریق راهنمایی می‌کند.]

و اگر شئ که نصف عدد اشیاء از آن کم شده $\left[x - \frac{1}{2}b\right]$، یا نصف عدد اشیاء که از آن شئ کـم شده $\left[\frac{1}{2}b - x\right]$ را در خودش ضرب کنی؛ منجر شود به مال و عددی مساوی با عددی کـه بـا مـال

معادل با جذرها شده، منهای جذرهایی معادل با جذرهای موجود در معادله[1]. آنگاه نصف تعداد اشیاء جذر مال است.

مثال: اگر بگویم: یک مال و بیست و پنج درهم مساوی ده شئ است: $x^2+25=10x$؛ پس اگر یک شئ بجز پنج را یا پنج بجز یک شئ را در خودش ضرب کنیم؛ حاصل یک مال و بیست و پنج بجز ده شئ می‌شود $\left[x^2+25-10x\right]$. و این ده شئ کم شده برابر با یک مال و بیست و پنج است. پس به همین صورت بیست و پنج، بیست و پنج را از بین می‌برد. پس اگر مقابله را ادامه دهیم، چیزی باقی نمی‌ماند که از ضرب کردن چیزی در چیزی به دست آوریم یا از ضرب کردن چیزی کمتر در چیزی کمتر به دست آوریم. و اگر چنین است پس مثل این است که بگوییم یک شئ بجز پنج چیزی باقی نمی‌گذارد یا پنج بجز شئ چیزی باقی نمی‌گذارد. بنابراین ما کل آن شئ را یا کل آن پنج را استثناء کرده‌ایم. پس همهٔ پنج همهٔ شئ است و همهٔ شئ پنج است.

[او سپس در مورد حالتی بحث می‌کند که در آن مربع نصف عدد اشیاء کمتر از عدد است که بدین معنی است که معادله جواب ندارد.]

سومین مسئله در مورد نصف کردن عدد اجذار

$$\left[x^2=bx+c \rightarrow x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2+c}+\frac{1}{2}b\right]$$

در اینجا توضیح می‌دهیم چرا در مسئلهٔ سوم می‌گوییم راه‌حل این است که باید عدد اشیاء را نصف کنی و آن را در خودش ضرب کنی و عددی که با اشیاء است را به آن اضافه کنی و جذر آن را استخراج کنی و به نصف عدد اشیاء اضافه کنی، آنگاه مجموع جذر مال است.

این مانند آن است که بگوییم «پنج درهم و چهار شئ معادل یک مال است» $[5+4x=x^2]$. می‌خواهیم بین اشیاء و اعداد همخوانی ایجاد کنیم و لازم است که از اشیاء نصف عدد اشیاء کم شود و نه بیشتر، چون که مال معادل اشیاء و اعداد است.

[او سپس توضیح می‌دهد که شئ، x، باید بزرگتر از $\frac{1}{2}b$ باشد.]

پس اگر از شئ همان نصف عدد اشیاء را کم کنیم، یک شئ بجز دو درهم $[x-2]$ باقی می‌ماند. این را در خودش ضرب می‌کنیم تا یک مال و چهار درهم بجز چهار شئ شود: $[(x-2)^2 \rightarrow x^2+4-4x]$.

---

۱. «عددی که با مال معادل با جذرها شده» همان c و «جذرهایی معادل با جذرهای موجود در معادله» bx است. در این شرایط $(x-\frac{b}{2})^2$ و $(\frac{1}{2}b-x)^2$ معادلند با x^2+c-bx یا به عبارت ساده‌تر $(\frac{1}{2}b)^2=c$.

فرض کردیم که مال در این مسئله برابر با چهار شئ و پنج درهم باشد. پس اگر چهار شئ و پنج درهم را در این ضرب به جای مال قرار دهیم، داریم

$$x^2+4-4x \rightarrow (4x+5)+4-4x$$

پس یک شئ بجز دو درهم را در خودش ضرب می‌کنیم تا نه درهم را به دست آوریم:

$$(x-2)^2 \rightarrow 9$$

جذر نُه را به دست می‌آوریم، که سه است که برابر با یک شئ بجز دو درهم است. پس اگر به سه، دو درهم را اضافه کنیم، مقدار شئ برابر با پنج می‌شود که جواب مورد نظر است. اگر این پنج را در خودش ضرب کنیم، بیست و پنج می‌شود که مال است که مساوی است با چهار شئ که بیست است و پنج درهم.

کرجی مجموعهٔ دیگری از اثبات‌های حسابی را در کتابش، الکافي في الحساب، عرضه می‌کند. اثبات‌ها برای انواع ۴ و ۶ معادلات شبیه هستند؛ اما با معادلات کتاب علل حساب الجبر والمقابلة یکسان نیستند و اثبات نوع ۵ کاملاً متفاوت است. به نظر می‌رسد کرجی با این آثار جریانی را به دور از اثبات هندسی آغاز کرده است. چهار ریاضیدان بعدی که تحت تأثیر مستقیم یا غیر مستقیم کرجی قرار گرفتند و کسانی که اثبات حسابی این قوانین را عرضه کردند، عبارتند از: ابن یاسمین (د. ۶۰۰ق)، ابن بنّا (اواخر قرن هفتم هجری)، کمال الدین فارسی (حدود ۷۲۰ق) و ابن هائم (۷۸۹ق). این اثبات‌ها مبتنی بر سه حالت زیر بودند: (الف) قانون مجذور دوجمله‌ای یا تبدیل به مربع کامل، (ب) بیان مجدد قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس با جملات حسابی، یا (ج) دستور سادهٔ خاصی برای ضرب اعداد که از حساب انگشتی گرفته شده بود.

۹. نتیجه گیری

تعداد اندکی از مورخان به «روش دیوفانتوس» کرجی توجه کرده‌اند. فرانتس وپکه[۱] دو متن مذکور از الفخري را بی هیچ توضیحی ترجمه کرده است. توماس هیث[۲] و پل ور اکه[۳] از کار وپکه اطلاع داشتند، اما آن‌ها هم در کتاب‌های خود از این روش نامی نبرده‌اند. رشدی راشد آن را مطرح می‌کند، اما او نیز در پیوند دادن آن با نامگذاری اجزایی از ده به صورت «پنج و یک شئ» و «پنج بجز یک شئ» در ابتدای راه‌حل برخی از مسائل در نوشتهٔ ابوکامل گمراه شده است. تنها مورخی که به طور جدی موضوع را بررسی کرده ژاک سزیانو است. او می‌نویسد:

بعید به نظر می‌رسد که کرجی از هیچ روش دیوفانتوسی برای حل معادلات درجهٔ دوم کامل اطلاع داشته است؛ زیرا این معادلات نه تنها در سه کتاب بعدی یونانیان وجود دارد که ظاهراً کرجی با آن‌ها

1. Franz Woepcke
2. Thomas Heath
3. Paul Ver Eecke

آشنا نبوده است بلکه روش حل آن‌ها در اریثمتیکا مانند آنچه کرجی به کار برده و صریحاً به دیوفانتوس نسبت داده نیست. می‌توان تصور کرد کرجی از رسالهٔ دیگری از دیوفانتوس یا منسوب به او در این موضوع اطلاع داشته است؛ اما هیچ منبعی نداریم که نام دیوفانتوس را با چنین اثری مرتبط سازد.

این بحث را که کرجی با متن یونانی مقالات چهارم تا ششم آشنا نبوده، عادل انبوبا در چکیدهٔ همراه با تصحیحش از کتاب البدیع في الحساب کرجی آورده است. حتی اگر کرجی این کتاب‌ها را نخوانده باشد، به این معنی نیست که او کتاب گمشده‌ای را که در آن راه‌حل‌های معادلات سه‌جمله‌ای توضیح داده شده، نخوانده است. دو راه‌حل به سبک دیوفانتوس برای معادلات کامل در البدیع في الحساب که در بخش هفتم بالا ترجمه شد، نشان می‌دهد که کرجی روش دیوفانتوس را برای استخراج ریشه‌های این معادلات می‌دانسته است و این ما را از پرداختن به فرض‌های نامحتمل سزیانو نجات می‌دهد. پس مسئله به سازگاری روش دیوفانتوس با عمل واقعی دیوفانتوس تبدیل می‌شود.

به احتمال زیاد دیوفانتوس هم همان سه معادلهٔ مقترنه را که در جبر دورهٔ اسلامی می‌یابیم در جایی در قسمت‌های موجود مقالهٔ هفتم و مقالهٔ چهارم اریثمتیکا طبقه‌بندی یا حل کرده است. قواعدی که دیوفانتوس در حل نامعادلات مسئلهٔ ۳۹ مقالهٔ چهارم و مسئلهٔ ۱۰ مقالهٔ پنجم دنبال می‌کند؛ همچون قواعد جبر دورهٔ اسلامی فاقد هرگونه توضیحی دربارهٔ منطق کارکرد این قواعد است. این خلاف روحیهٔ آموزشی کتاب اوست که قواعد را بدون هیچگونه استدلال یا توضیحی در توجیه آن‌ها عرضه کند، در صورتی که در مقدمهٔ کتاب خود قول چنین توضیحی را داده بود. «روش دیوفانتوس» در آثار کرجی این نقش را به خوبی پر می‌کند و آن «روش» با نام دیوفانتوس همراه می‌شود که قبلاً به آن پیوست شده بود.

بنابراین من حدس می‌زنم که دیوفانتوس برای هر نوع معادله، قاعدهٔ (۲) را برای معادلات غیرنرمال با استفاده از روش (۴) استخراج کرده است. در واقع این روش برای معادلات غیرنرمال نیز کاربرد دارد. برای مثال برای حل معادلهٔ از نوع $ax^2 + bx = c$ هر کسی می‌تواند همهٔ جملات را در a ضرب کند تا به صورت

$$a^2x^2 + abx = ac$$

درآید و سپس عددی را جستجو کند که وقتی به سمت چپ اضافه شود یک مربع تولید شود. (این عدد $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$ است و مربع حاصل به صورت $\left(ax + \frac{1}{2}b\right)^2$ می‌شود.) با این روش هر کسی می‌تواند مستقیماً به قاعدهٔ دیوفانتوس برسد. البته این صرفاً یک حدس است و ممکن است دیوفانتوس به جای آن با تقسیم بر $\frac{5}{4}$ با معادلات نرمال کار کرده باشد، همانطور که کرجی نشان می‌دهد. هر دوی اقتباس‌ها در سرشتشان رویکردی دیوفانتوسی دارند و می‌توانند منجر به قاعده‌ای شوند که او در مقالات موجود آن را دنبال کرده است.

کرجی به نوبهٔ خود قاعدهٔ به دست آوردن مستقیم مال (۳)؛ و ایـدهٔ اثبـات قواعـد بـا اسـتفاده از قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس را از ابوکامل فراگرفتـه و نیـز قاعـدهٔ حـل معـادلات غیرنرمال (۲)، و روش دیوفانتوس، (۴)، را از دیوفانتوس اخذ نموده است. از آنجـا کـه اثبـات‌هـای هندسی برای کسانی که الفخري کرجی را می‌خواندنـد واضـح نبودنـد، وی روش دیوفـانتوس را بـا اثبات‌های حسابی برای قاعدهٔ استاندارد (۱) در رسالهٔ علل الجبر والمقابلة جایگزین کرد.

این جهت‌گیری جدید به دور از هندسه و به سمت اثبات حسابی تبدیل به روندی شد که چندین جبردان بعدی از جمله ابن یاسمین، ابن البنا، کمال الدین فارسی و ابن هائم آن را دنبال کردند. تنهـا کتاب‌های جبر دورهٔ اسلامی منتشر شده که پس از کرجی اثبات هندسی را دنبال کرده، عمر خیـام و سموئل مغربی است که بر مبنای آثار ابوکامل و کرجی آثارشان را تألیف کرده‌اند. حتی شرف الـدین طوسی در تنظیم معادلات خیام بر الگوریتمی عددی بـرای حـل معـادلات متکـی اسـت. بـه نظـر می‌رسد کرجی با الهام از دیوفانتوس این روند را آغاز کرده باشد.

منابع

[1]. Abū Kāmil, Alg.(a): Hogendijk, J. P. 1986. *The Book of Algebra: Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala*. Frankfurt.

[2]. Abū Kāmil, Alg.(b): Rashed, R. 2012. *Algèbre et Analyse Diophantienne*. Berlin.

[3]. al-Karajī, al-Badīʿ: Anbouba, A. 1964. *al-Badīʿ fī al-ḥisāb*. Beirut.

[4]. al-Karajī, al-Kāfī: Chalhoub, S. 1986. *al-Kāfī fī'l ḥisāb*. Aleppo.

[5]. al-Karajī, al-Fakhrī: Saidan, A. S. 1986. *Tārīkh ʿilm al-jabr fī l-ʿālam al-ʿArabī*. (History of Algebra in Medieval Islam). 2 vols. Kuwait.

[6]. al-Khwārizmī: Rashed, R. 2009. *Al-Khwārizmī: The Beginnings of Algebra*. London.

[7]. Sinān ibn al-Fatḥ: *Kitāb al-kaʿb wa'l-māl wa'l-aʿdād al-mutanāsiba*. MS Cairo, Riyadāt 260/4 ff. 95r-104v.

[8]. Woepcke, F. 1853. *Extrait du Fakhrī*, Traité d'Algèbre par Aboù Bekr Mohammed ben Alhaçan AlkarkhÎ (Manuscrit 952, Supplément Arabe de la Bibliothèque Impériale); Précédé d'un Mémorie sur l'Algèbre Indéterminée chez les Arabes. Paris.