بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

میراث علمی اسلام و ایران

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی
سال سیزدهم، شماره‌های اول و دوم، سال ۱۴۰۳
شمارهٔ پیاپی: ۲۵ و ۲۶

صاحب امتیاز: **مؤسسهٔ پژوهشی میراث مکتوب**
مدیر مسئول: **اکبر ایرانی**
سردبیر: **محمد باقری**
مدیر داخلی: **زینب کریمیان**
اجرای جلد: **محمود خانی**

مدیر فنّی و امور چاپ: **حسین شاملوفرد**

تصویر پشت جلد: نقش کاشیکاری از مدرسهٔ الغ‌بیگ در سمرقند با کتیبهٔ: العلم کنز [عظیم] لا یفنا (از حضرت علی (ع))

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶   تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲   دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۶۰،۰۰۰ تومان

فهرست

مقاله

معرفی کتاب

یادداشت‌های تاریخی

یادنامه‌ها

رسائل

هندسه و شاخه‌های آن[۱]

گلن وان بروملن[۲]
ترجمهٔ مرضیه شمس‌یوسفی[۳]

هندسه همه جا هست و چنان بخش اساسی از تجربهٔ انسانی است که به نظر می‌رسد نتوان بدون آن زندگی کرد. پس ناگزیر هر فرهنگی به این یا آن شکل هندسی می‌اندیشد. با این حال، گروه‌های مختلف تجربیات بسیار متفاوتی را تبادل کرده‌اند. بیان غالب اندیشهٔ هندسی در فرهنگ غرب، شکلی منطقی در قالب دستگاه‌های اصل موضوعی-استنباطی با الهام از اصول اقلیدس (قرن سوم ق. م)، نیز تأثیر عمده‌ای بر دانشمندان جوامع اسلامی داشت. اما این بدان معنا نیست که آنها صرفاً پیرو بودند. در واقع، هندسه‌دانان در آن جوامع هندسهٔ اقلیدسی را بسیار فراتر از اقلیدس پیش بردند. گنجینهٔ قضایای هندسی تا حد زیادی گسترش یافت، دامنهٔ روش‌ها و رویکردها ژرف‌تر و متنوع‌تر شد.

هندسه‌دانان فراتر از رشتهٔ خود پیش رفتند و روش‌های خود را با تنظیمات جدید پیاده کردند. به عنوان مثال، نجوم قبلاً به عنوان شکلی از هندسهٔ کاربردی بیان شده بود، اما نیازهای آیینی مانند تعیین سمت قبله باعث گسترش هندسه در جغرافیا شد. رشته‌هایی چون نورشناخت و معماری نیز در مسیر هندسی قرار گرفتند. آنها نه تنها از رویکرد اقلیدسی بهره بردند، بلکه بر هندسهٔ مسّاحی مورد استفاده در زندگی روزمره نیز مبتنی بودند. کاربرد اندازه‌گیری کمّی در هندسه، به تولید نتایج معنی‌دار فیزیکی و اجتماعی، که تنها با آموزه‌های اقلیدس نمی‌توانست به دست آید، کمک کرد.

هندسهٔ اقلیدسی

متون هندسی بخش قابل توجهی از ترجمه‌های علمی در قرن‌های دوم و سوم هجری را تشکیل می‌دادند. جای تعجب نیست که یکی از نخستین منابعی که به عربی ترجمه شد، کتاب اصول اقلیدس بود. اگرچه این کتاب حاوی موضوعاتی مانند نظریهٔ نسبت و اعداد اول است، اما هم در آن

---

۱. این مقاله ترجمه‌ای است از:
Glen Van Brummelen, “Geometry and its branches”, in *Routledge Handbook on the Sciences in Islamicate Societies*, Chapter 5, Taylor and Francis, 2023.

۲. مدرس ریاضیات و پژوهشگر تاریخ ریاضیات یونان و دورهٔ اسلامی در دانشگاه کونست (Quest) کانادا، gvb@questu.ca

۳. استادیار گروه ریاضی محض دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه گیلان m.shams@guilan.ac.ir

زمان و هم اکنون بیشتر به عنوان کهن‌الگویی برای استدلال هندسی شناخته می‌شود. اولین مترجم آن، حجاج بن یوسف بن مطر (د پس از ۲۱۳ق)، در واقع دو بار کار ترجمه را انجام داد: ابتدا در زمان خلیفهٔ عباسی هارون الرشید (حک ۱۷۰-۱۹۳ق) در دههٔ اول سدهٔ سوم هجری یا پیش از آن و بار دوم حدود ۲۵ سال بعد در زمان خلیفه مأمون (حک ۱۹۸–۲۱۸ق). بعدها در قرن سوم هجری، اسحاق بن حنین (د ۲۹۸ق) باید ترجمهٔ جدیدی فراهم کرده باشد که ثابت بن قره (د ۲۸۸ق) آن را تصحیح کرد. اکنون پژوهشگران برای گره‌گشایی از این سؤال می‌کوشند که متن عربی در اختیار ما از حجاج، یا اسحاق بن حنین است یا ثابت بن قره؟ این موضوع تاکنون حل نشده است.

آنچه در این متن یافت می‌شود حاکی از آن است که کلمهٔ انتقال، به معنی بارگیری غیرفعال اطلاعات از یک فرهنگ به فرهنگ دیگر اصطلاح گمراه‌کننده‌ای است.

به عنوان مثال اولین گزارهٔ مقالهٔ دوم اصول می‌گوید (شکل ۱):

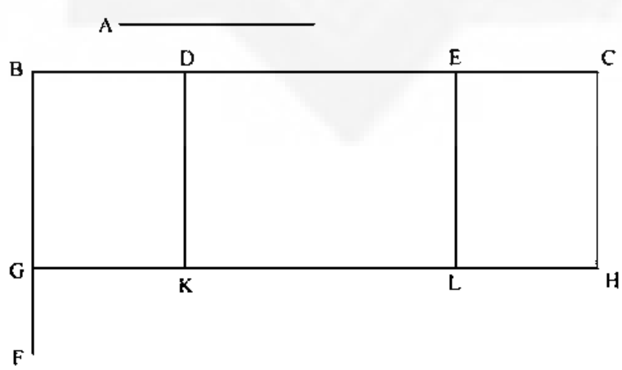
اگر دو خط مستقیم [A و BC] وجود داشته باشد و یکی از آنها به هر تعداد دلخواه تقسیم شود [BD، DE و EC]، در این صورت مساحت مستطیلی که توسط دو خط مستقیم به وجود می‌آید، برابر است با مجموع مساحت مستطیل‌های حاصل از خط مستقیم بریده نشده و هر یک از پاره‌خط‌ها.

این گزاره را می‌توان صورتی از رابطهٔ زیر تعبیر کرد:

$$a\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n$$

(که در آن $a = A = BG$، $x_1 = BD$، $x_2 = DE$، . . .). اما برای اقلیدس، مستطیل مستطیل بود، و کمیت‌های هندسی اشیائی کاملاً متفاوت با اعداد بودند. از سوی دیگر، حجاج (یا یک مؤلف بعدی) بخشی از مطلب مربوط به «مستطیل» را چنین بیان می‌کند:

آنچه از ضرب یکی از خطوط در دیگری حاصل می شود.



شکل ۱. قضیهٔ اول مقالهٔ دوم اصول اقلیدس

این تفاوت نشان‌دهندهٔ رد تلویحی تمایز اقلیدس بین مقدارهای هندسی و کمیت‌های عددی است. این ممکن است به دلایل آموزشی یا شاید در پاسخ به دغدغه‌های عمیق‌تر فلسفی انجام شده باشد. در هر صورت، متفاوت است، و کاملاً ترجمهٔ سخن اقلیدس نیست.

ترجمهٔ دیگری که تا همین اواخر به ثابت بن قره نسبت داده می‌شد، کاملاً متفاوت است. اینجا همین متن به گونه‌ای ترجمه شده است که شاید مورد نظر اقلیدس بوده باشد، اگرچه برای خوانندهٔ امروزی دردسر بیشتری ایجاد می‌کند:

سطحی با زاویهٔ قائمه که توسط دو خط راست محصور شده است.

هنگامی که کلمهٔ «مستطیل» مورد نیاز است، مترجم از واژهٔ سطح یا «مساحت» استفاده می‌کند.

کتاب اصول در طول سده‌های میانه هم به عنوان یک ابزار تحقیق و هم به عنوان کتاب درسی مورد توجه قرار گرفت. معروف‌ترین کار با نام تحریر (ویرایش و شرح) توسط علامه نصیرالدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ق) تهیه شده‌است: بخشی از طرح او برای تهیهٔ تحریرهای عربی بسیاری از آثار کلاسیک یونانی در ریاضیات و نجوم که شاید در رصدخانهٔ مراغه تدریس می‌شد.

این کتاب خیلی زود جای خود را به عنوان منبع ترجیحی هندسه باز کرد و به فارسی و سانسکریت ترجمه شد. به این ترتیب اولویت‌های طوسی (به عنوان مثال، علاقه نداشتن او به مطالعهٔ کمیت‌های گنگ در مقالهٔ دهم) به بسیاری از دانشجویان هندسه در اواخر سده‌های میانه منتقل شد.

همچنین محققان ارتباط وسیعی با کتاب اصول گرفتند و تقریباً هیچ بخشی از محتویات یا روش‌های آن را دست نخورده باقی نگذاشتند. مثلاً شرح مبسوط نیریزی (د ۳۱۰ق) در اوایل قرن چهارم هجری، تردید نویسندگان یونان باستان و سپس نویسندگان عربی اخیر را گرد هم می‌آورد و رویکردهای اقلیدس به اصل توازی و ماهیت نسبت را زیر سؤال می‌برد. در مورد ماهیت نسبت، نیریزی به جای تبیین پیچیدهٔ اقلیدس از تعریف نسبت توسط سلف خود، ماهانی (د پس از ۲۵۲ق) که مبتنی بر تفریق دوسویه[1] (آنتی‌فایرتیک[2]) است استفاده می‌کند: دو نسبت مساوی گفته می‌شوند، اگر الگوریتم اقلیدسی برای هر دو اعمال شود و دنبالهٔ یکسانی از اعداد در هر دو بار حاصل شود؛ رویکردی که به درک حسابی ما نزدیک‌تر است.

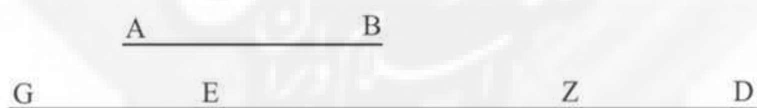
این تعریف مبتنی بر تفریق دو سویه (آنتی‌فایرتیک) که در رسالهٔ شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس عمر خیام (۴۳۹- حدود ۵۱۷) به بهترین وجه بیان شده‌است شامل چنان تلقی

۱. بنگرید به مقالهٔ «تعریف نسبت بر پایهٔ تفریق دو سویه در ریاضیات دورهٔ اسلامی»، یان پ. هوخندایک، ترجمهٔ محمدمهدی کاوه‌یزدی در میراث علمی، سال پنجم، شمارهٔ دوم (پیاپی ۱۰)، ص ۴۵-۶۵.

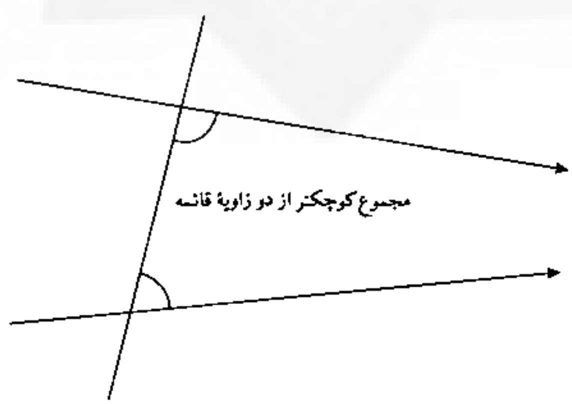
2. anthyphairetic

حسابی از مقادیر هندسی است که می‌توان آن را با نظریهٔ امروزی اعداد حقیقی یکی دانست (خیام، ۱۹۹۹، ۲۰۰۲).

نویسندگان دیگر، که آشکارا نگران مسائلی که اقلیدس را برانگیخته بود، نبودند، بخش‌هایی از اصول را بازنویسی کردند تا با اهدافشان هماهنگ شود. به عنوان مثال، ابوسهل کوهی هندسه‌دان (نیمهٔ دوم قرن چهارم هجری) رساله‌های متعددی در مورد بازآرایی یا تقویت برخی مقاله‌های اصول نوشت. برداشت او از مقالهٔ اول از دو جهت با اقلیدس متضاد است. نخست، او تمام ترسیم‌های اقلیدس را که در انتهای قضایا قرار داشت، حذف می‌کند (مثال: «ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاع روی یک پاره‌خط»). احتمالاً او احساس می‌کرد که این موارد فعالیت‌های متفاوتی هستند و باید جداگانه بررسی شوند. دوم، او ساختار منطقی را بازآرایی می‌کند. مقالهٔ اول برای پرهیز از کاربرد اصل موضوع مشکل‌ساز توازی (اصل موضوعی معادل این گزاره که مجموع زوایای هر مثلث برابر با دو زاویه قائمه است) تا حد امکان سازماندهی شده بود، اما کوهی چنین دغدغه‌ای نداشت (کوهی ۲۰۰۵). روایت کوهی از مقالهٔ دوم نیز به همین ترتیب متفاوت است. نمودارهای او برای گزاره‌ها فقط شامل بخش‌های مورد نیاز برای بیان نتایج هستند، نه آنهایی که برای اثبات لازمند؛ مثلاً، نمودار کوهی برای قضیهٔ اول مقالهٔ دوم (شکل ۲) را با نمودار اقلیدس مقایسه کنید.



شکل ۲. نمودار کوهی برای قضیهٔ اول از مقالهٔ دوم اصول اقلیدس



شکل ۳. اصل توازی

نتیجه اثباتی است که به نمودار وابسته نیست و در حالی که دقیقاً جبری نیست، حداقل تا حدودی از استدلال هندسی صرف فاصله می‌گیرد. با این حال، هدف او هنوز هندسی است. او تعدادی قضیه برای پر کردن شکاف‌های برهان‌های کتاب مخروطات آپولونیوس (حدود ۲۶۲ تا حدود ۱۹۰ ق. م) اضافه می‌کند (کوهی ۱۹۹۲؛ ۲۰۰۲–۲۰۰۳).

مقالهٔ اول به‌ویژه به دلیل استقرار اصول موضوعه به عنوان نقطهٔ شروع منطقی تحقیق هندسی اهمیت دارد. همچنین به خاطر یکی از این اصول موضوعه، که به عنوان «اصل موضوع توازی» شناخته می‌شود، بحث‌برانگیزترین [مقالهٔ اصول] است (شکل ۳):

اگر یک خط راست دو خط راست دیگر را قطع کند و زوایای داخلی در یک طرف کمتر از دو زاویهٔ قائمه باشند، دو خط راست، اگر به طور نامحدود امتداد داده شوند، در طرفی که زوایای آن کمتر از دو زاویهٔ قائمه است، به هم می‌رسند.

این گزاره که به‌ظاهر بدیهی است و در عین حال امروزه می‌دانیم که قابل اثبات از دیگر اصول اقلیدس نیست، دردسرساز بود. برخی از دانشمندان، چون ثابت بن قره، کوشیدند آن را به طرق مختلف اثبات کنند. اثبات ثابت بن قره با جایگزینی تعریف اقلیدس از مفهوم توازی (خطوطی که «همدیگر را قطع نمی‌کنند») با تعریفی که طبق آن خطوط موازی فاصلهٔ ثابتی از هم دارند، کار کرد (راشد و هوزل ۲۰۰۵؛ صبره ۱۹۶۸). این تعریف اساس حکم را تغییر می‌دهد و اصل را قابل اثبات می‌کند. مشهورترین اثبات، از عمر خیام (در همان رساله‌ای که قبلاً ذکر کردیم) مدعی است که خطوطی که همگرا هستند باید متقاطع شوند، در نتیجه مفهوم فاصله را نیز در بحث وارد می‌کند.

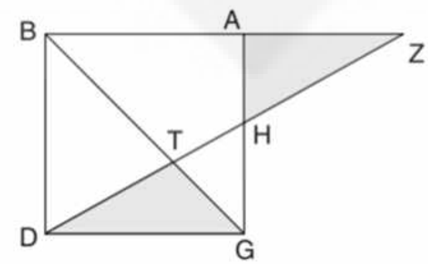
مقاطع مخروطی

اگرچه دانشمندان جوامع اسلامی در استفاده از روش‌های اقلیدسی (خط‌کش و پرگار) فراتر از پیشینیان یونانی خود رفتند، اما علاقهٔ خاصی به تغییر ابزارهایی که اجازهٔ ورود به قلمرو هندسه را داشتند، نشان دادند.

به عنوان نمونه، چندین نویسنده (از جمله فارابی (د ۳۳۹ق) و ابوالوفا (۳۲۸–۳۸۸ق)) به بررسی ترسیم‌هایی پرداختند که فقط با استفاده از یک پرگار زنگ زده امکان‌پذیر است، پرگار با دهانهٔ ثابت و نه متغیر. توجه بیشتری هم به مسائل به اصطلاح جامد (درجهٔ سوم) معطوف شد؛ مواردی که با استفاده از مقاطع مخروطی قابل‌حل هستند. بسط ابزارهای هندسی برای گنجاندن بیضی، سهمی و هذلولی، دامنهٔ موضوع را به طور چشمگیری گسترش می‌دهد و مسئله‌هایی را که با خط‌کش و پرگار حل‌شدنی نبودند، حل می‌کند. ابوسهل کوهی ابزاری به نام پرگار کامل یا تام برای رسم مقاطع مخروطی، شبیه به پرگار برای رسم دایره، ابداع کرد و ابوسعید سجزی (د ۴۱۱ق) و ابوالوفا دربارهٔ کاربرد آن کاوش کردند.

کتاب پایه برای مطالعهٔ مقاطع مخروطی، مخروطات آپولونیوس بود، اما تنها چهار مقالهٔ نخست از هشت مقالهٔ آن به زبان یونانی باقی مانده است. مقاله‌های پنجم تا هفتم در ترجمه‌های عربی ثابت بن قره و سه برادر معروف به بنوموسی باقی مانده است (قرن سوم هجری؛ آپولونیوس ۱۹۹۰؛ آپولونیوس پرگایی ۲۰۰۸-۲۰۱۰). مقالهٔ هشتم کلاً گم شده است و ابن هیثم (۳۵۴-۴۳۰ق) در رساله‌ای به نام مقاله فی تمام کتاب المخروطات (ابن هیثم، ۱۹۸۵، ۲۰۰۰) آن را بازسازی کرد. ظاهراً ابن هیثم معتقد بود که آپولونیوس به سمت مسائلی مرتبط با ترسیم خطوط مماس بر مقاطع مخروطی پیش می‌رفته است و در رساله‌اش به حل این مسائل می پردازد.

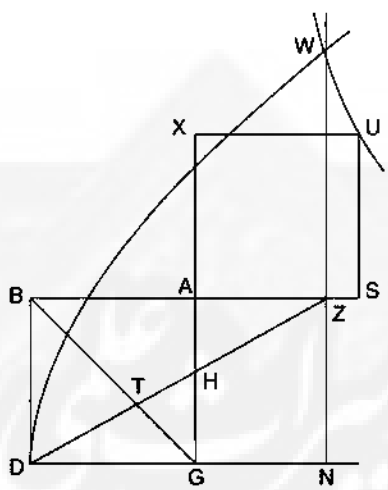
یکی از موضوع‌های مورد علاقه به‌ویژه در قرن سوم تا پنجم هجری ترسیم چندضلعی‌های منتظم بود که نمی‌توان آنها را با خط‌کش و پرگار ترسیم کرد، به‌ویژه هفت‌ضلعی و نه‌ضلعی. اگرچه در یونان باستان ترسیم هفت ضلعی کانون توجه خاصی نبوده است، در رساله‌ای منسوب به ارشمیدس [چنین ترسیمی] وجود دارد که توسط ثابت بن قره به عربی ترجمه شده است. این ترسیم شبیه چیزی است که به عنوان ترسیم به روش گرایش[1] (میل) شناخته می‌شود. مبنای ترسیمی (شکل ۴)، که ارشمیدس از آن برای ساختن هفت ضلعی خود استفاده می‌کند (در اینجا ترسیم نشده است)، چنین است: مربع ABGD را بکشید، BA را به سمت راست گسترش دهید، و قطر BG را بکشید. سپس پاره‌خطی از D به سمت بالا و به سمت راست بکشید تا BA را در Z در سمت راست A قطع کند، چنان‌که مثلث‌های AHZ و DTG مساحت یکسانی داشته باشند. واضح است که چنین نقطه‌ای وجود دارد، اما صرف ادعای وجود آن و ترسیم یک هفت‌ضلعی از آن فایدهٔ چندانی ندارد، زیرا به‌وضوح خود هفت‌ضلعی منتظم نیز وجود دارد و می‌توانیم آن را جایگزین کنیم. اعتراض تعدادی از نویسندگان قرن چهارم و پنجم هجری این بود که چنین روش‌هایی را به دلیل ناکافی بودن و تعلقشان به هندسهٔ «متحرک» به جای هندسهٔ «ثابت»، رد می‌کردند. (این اصطلاحات بازتاب این برداشت است که نقطهٔ Z را باید در راستای BA به جلو و عقب حرکت داد تا اینکه مساحت دو مثلث مساوی شود.)



شکل ۴. گام کلیدی در روش ارشمیدس برای ترسیم هفت‌ضلعی

1. Neusis

اما در تمام ترسیم‌های هفت‌ضلعی منتظم که به ما رسیده است از مقاطع مخروطی- با این که در مجموعهٔ ابزارهای خط‌کش و پرگار نیستند- استفاده می‌شود، و همچنان به عنوان بخشی از هندسهٔ ثابت در نظر گرفته می‌شوند. تعدادی از این ترسیم‌ها نشان می‌دهند که چگونه می‌توان نقطهٔ Z را بر خط ارشمیدسی BA تعیین کرد. یکی از این روش‌ها که در حدود سال ۵۹۵ق توسط کمال‌الدین بن یونس (۵۵۱-۶۳۶ق) عرضه شده به قرار زیر است.



شکل ۵. راه حل کمال‌الدین یونس برای مسئلهٔ هفت ضلعی منتظم

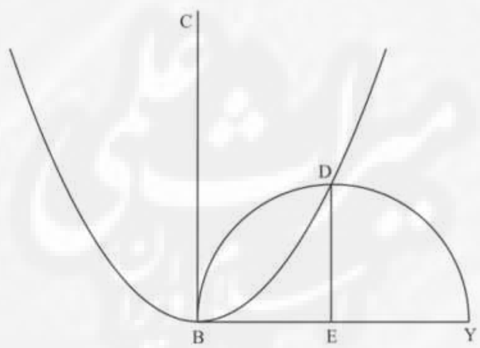
در شکل ۵، یک مربع AXUS برابر با ABGD و یک هذلولی گذرنده از U که مجانب‌های آن AX و AS باشند رسم کنید. سپس یک هذلولی متساوی الساقین (هذلولی‌ای که مجانب‌های آن بر هم عمودند) DW بر محور DG رسم کنید. عمودی از W نقطهٔ تقاطع دو هذلولی بر امتداد DG وارد کنید. اکنون محل تقاطع WN با امتداد BA نقطهٔ مورد نظر ما یعنی Z است. پس کمال‌الدین و همکارانش معیار مشترکی برای مقبولیت داشتند: مقاطع مخروطی پذیرفته می‌شد، اما ترسیم‌های گرایشی (به روش میل) مورد قبول نبود (ابن هیثم ۲۰۰۰). با این حال، خواهیم دید که این معیار در همهٔ زمینه‌ها اعمال نمی‌شد.

علاقه‌مندی خاصی برای ترسیم نُه‌ضلعی منتظم وجود دارد؛ زیرا حالت خاصی از تثلیث زاویهٔ مفروض، یکی از سه مسئلهٔ کلاسیک حل‌نشدهٔ دوران باستان است. مثل مورد قبل، ترسیم‌های گرایشی باستانی رد شدند و راه‌حل‌هایی با استفاده از مخروطات توسط نویسندگانی از جمله ثابت بن قره و کوهی ابداع شد. در بخش مثلثات، به مسئلهٔ تثلیث [زاویه] برمی‌گردیم.

تثلیث زاویه از نظر ریاضی، معادل حل معادلهٔ درجهٔ سوم است، پس چندان که به نظر می‌رسد

عجیب نیست که مطالعهٔ مقاطع مخروطی پیوندی با جبر داشته باشد. نویسندگان متعـددی مقـاطع مخروطی را برای حل معادلات درجهٔ سـوم بـه کـار بردنـد، از جملـه ابـوجعفر خـازن (د ۳۵۰ یـا ۳۶۰ق)، خیام و ابوالجود محمد بن لیث (نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم و اوایل سدهٔ پنجم هجری). بهترین راه‌حل شناخته شده را عمر خیام در کتاب جبرش آورده است، که در آنجـا بـه طـور سـامان‌منـد بـه حالت‌های مختلف ممکن می‌پردازد. حل هندسی معادلهٔ جبری به چه معناست؟ این موضوع را بـا راه حل (کمی ساده شدهٔ) خیام از اولین معادلهٔ او $x^3 + mx = n$، توضیح می‌دهیم.

در شکل ۶ نیم‌دایره‌ای به قطر $BY = m/n$ رسم کنید. سپس یک سهمی به رأس B، محـور BC، و پارامتر $\sqrt{m}$ (در بیان امروزی، سهمی بـه معادلـهٔ $y = x^2/\sqrt{m}$، کـه رأس آن در B اسـت) رسـم کنید. از نقطهٔ D، محل تقاطع سهمی با نیم‌دایره، عمود DE را رسم کنید. اکنون می‌توان نشان داد که طول BE در معادلهٔ $x^3 + mx = n$ صدق می‌کند.



شکل ۶. راه حل خیام برای معادلهٔ $x^3 + mx = n$

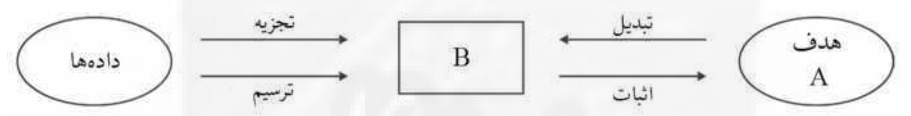
تجزیه و ترکیب

در اواخر قرن چهارم هجری سجزی رساله‌ای در حل مسائل هندسی شبیه کتاب کلاسیک امـروزی جورج پولیا (۱۸۸۷–۱۹۸۵)، با عنوان چگونه حل کنیم؟[1] نوشـت. او هفـت روش، کـه بسـیاری از آنها غیررسمی هستند، مانند روشن بودن داده‌ها و مجهولات یا درک قضایای مربوط به مسـئله آورد. با این حال، یکی از روش ها – تحلیل و تجزیه– روش رسمی‌تر بود. منشأ آن در یونان باستان است، اما در زمان خلافت عباسیان به روشی متمایز تبدیل و بسیار رایج شد.

فرض کنید بخواهیم که یک شکل A با ویژگی خاصی (مثلاً مثلث متساوی الاضلاع) از یک یـا چند شکل داده شده (مثلاً یک پاره‌خـط)، بسـازیم و نمـی‌دانـیم چگونـه ایـن کـار را انجـام دهـیم.

1. *How to solve it?*

تحلیلگر با این فرض شروع می‌کند که شکل A را پیش روی خود دارد و تبـدیلی (a) روی آن انجـام می‌دهد؛ یعنی از آن اشیاء دیگری می‌سازد. در نقطه‌ای، او به یک شکل B می‌رسد که حس می‌کنـد می‌تواند از شکل‌های داده شده بسازد. سپس تنها با استفاده از داده‌ها، نه با استفاده از قضایای اصول اقلیدس، بلکه با استفاده از کار کمتر شناخته شدۀ اقلیدس، مفروضات[1]، سعی می‌کند آن را بسـازد. این کتاب حاوی گزاره‌هایی است که بیان می‌کند اگر شکل‌های خاصی «داده شـوند»، آنگـاه شـکل دیگری هم داده شده‌است: مثلاً «اگر دو خط که مکانشان داده شده‌است در نقطه‌ای یکدیگر را قطـع کنند، آنگاه مکان تقاطع آنها هم داده شـده‌اسـت» (مفروضـات، ۲۵). وقتـی مسـیری از «داده‌هـا» هندسه‌دان را از نقطۀ شروع تا شئ B برساند، کار تجزیه را تکمیل کرده است. تلفیق تبدیل و تجزیـه به عنوان تحلیل شناخته می‌شود (شکل ۷).



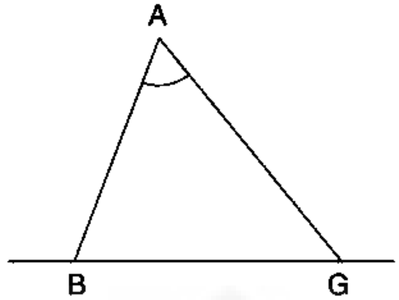
شکل ۷. ساختار تجزیه و تحلیل

از این دو نیمه، اثبات رسمی اقلیدسی، یا ترکیب، حاصـل مـی‌شـود. نخسـت، یـک تـن مسـیر «داده‌ها» را برای تجزیه در پیش می‌گیرد و آن را به شکلی رسمی و شبیه اصول اقلیدس بـرای ترسـیم شکل B گسترش می‌دهد. سپس، با دنبال کردن مسیر تبدیل اما وارونه (یعنی برهان از B بـه A)، بـه اثباتی برای این حقیقت می‌رسیم که A الزامات مسئله را برآورده می‌کند.

این فرایند نسبتاً پیچیده عملاً مسئلۀ اصلی را از طریق تبدیل، به مسئلۀ دیگری (احتمالاً ساده‌تر) تحویل می‌کند. با این حال، در جوامع اسلامی سده‌های میانه، بقیۀ فرایند، به‌ویژه تجزیه، به خـودی خود باارزش شناخته شد. بدین ترتیب در بسیاری از کارهای هندسی، A و B معادل گرفتـه شـدند و تجزیه و تحلیل تنها شامل تجزیه شد. در واقع، اغلب نویسندگان هیچ ترکیبی را ذکر نمی‌کردند و آن را به مجال دیگری موکول می‌کردند. بدین ترتیب، تعدادی از متـون هندسـی عربـی فقـط از تجزیـه تشکیل شده‌است.

برای اینکه احساسی در مورد چنین تجزیه‌هایی به خواننـده بـدهیم، نمونـه‌ای از آثـار کـوهی در اواخر قرن چهارم هجری عرضه می‌کنیم. مسئله ترسیم دو خط AB و AG از A بـه خـط داده شـدۀ BG به زاویۀ معین است، چنان که نسبت بین دو پاره‌خط برابر با مقدار مفروضـی باشـد (شـکل ۸). (توجه کنید که دو اصطلاح معلوم و مفروض هم معنی‌اند).

1. *Data*



شکل ۸. مثالی از یک تحلیل

چون نسبت خط BA به AG و زاویهٔ BAG معلومند، شکل مثلث ABG معلوم است. پس زاویهٔ ABG معلوم است. اما نقطهٔ A معلوم است، پس مکان خط AB معلوم است. بنابراین موقعیت خط AG معلوم است، زیرا زاویهٔ BAG معلوم است و موقعیت خط BG مشخص است و بنابراین هر یک از دو نقطهٔ B و G معلومند، و این همان چیزی است که می خواستیم بدانیم (کوهی ۲۰۰۱ الف، ص ۶۶).

این کل متن کوهی است. بدیهی است، اگرچه در آن زمان نام‌های باستانی تحلیل و ترکیب به کار می‌رفتند، اما روش‌ها یکسان نبود. ساختار جدید هم برای ترسیم‌های با خط‌کش و پرگار اقلیدسی و هم برای مقاطع مخروطی بسیار رایج شد.

هندسهٔ عملی

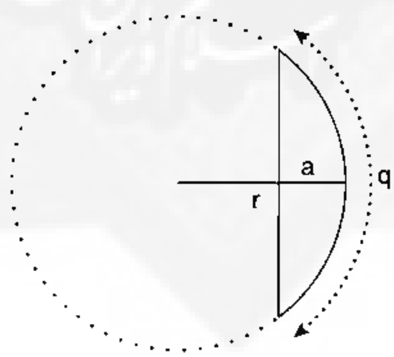
در قسمت‌های پیشین، بخش عمده‌ای از هندسهٔ مدرسه‌ای نیامده است: برای مثال، دستورهای مساحت، حجم و محیط. بدیهی است چنین دستورهایی در زندگی روزمره برای مساحی زمین، تقسیم ارث و غیره مفیدند. اما این مفاهیم با هندسهٔ علمی که تاکنون دیده‌ایم ربط چندانی ندارند. ولی در کنار رویکرد نظری، یک رشتهٔ عملی وجود داشت که اغلب «مساحت» [یا مساحی] نامیده می‌شد، که در آن اندازه‌گیری مقادیر هندسی مطرح بود.[1]

ظاهراً این دانش پیش از هندسهٔ نظری وجود داشته و از سدهٔ سوم هجری در آثار جبردانان بزرگی چون خوارزمی (د پس از ۲۳۳ق) و ابوکامل (ح ۲۳۵-۳۱۷ق) یافت شده‌است. ابوکامل در ابتدای کتاب المساحة، خود دستورهایی برای یافتن مساحت مربع، طول قطر آن و مساحت مستطیل عرضه می‌کند. سپس، برای مساحت و محیط دایره، استفادهٔ ضمنی از تقریب متعارف $\pi \approx ۳\frac{۱}{۷}$ را

۱. واژهٔ عربی «هندسه» از «اندازهٔ» فارسی گرفته شده‌است. م

در این کتاب می‌بینیم. موضوع‌های دیگر شامل مساحت مثلث و چهارضـلعی و حجـم و مسـاحت سطح منشور، استوانه، هرم و کره است. در بخش پیشـرفته‌تر ایـن رسـاله، نحـوهٔ محاسـبهٔ مسـاحت چندضلعی‌های منتظم مختلف محاط در دایره‌هایی با قطر مشخص آمده است. ابوکامل در سراسـر کتاب مثال‌های عددی می‌آورد و خوانندگانی را که به دنبـال اثبات‌هـای هندسـی هسـتند بـه سـوی اقلیدس هدایت می‌کند. شاید او می‌خواست که رساله‌اش را زمین‌داران به کار گیرند، اما روش‌هـای تقریبی که قبلاً توسط مساحان رسمی به کار می‌رفت، همگی باعث افزایش حجم دارایی‌هـای آنهـا می‌شد. بنابراین، شاید مالکان کاهش ناشی از روش‌های دقیق ابوکامـل اسـتقبال نکردنـد (ابوکامـل ۱۹۹۶، ۲۰۱۴).

برخی از این رساله‌ها مفصل‌تر بودند، مثلاً رساله فی التکسیر[۱] کـه ابـن عبـدون (۳۱۱- پـس از ۳۶۶ق) در قرن چهارم هجری نوشت. این اثر، به عنوان کهن‌ترین متن ریاضی عربی شناخته‌شده از اندلس[۲]، حاوی بـیش از ۱۰۰ مسـئله اسـت کـه برخـی از آنهـا چـالش‌انگیزنـد: مـثلاً: «مسـاحت مستطیلی را با داشتن طول قطر و اختلاف طول اضـلاع آن پیـدا کنیـد». برخـی از دسـتورهای او در مورد مقادیر در دایره تقریبی است. به عنوان مثال، برای یـافتن طـول کمـان q از قطعـه‌ای از دایـره بـا داشتن سهم آن a و شعاع آن r (شکل ۹)، قاعدهٔ ابن عبدون معادل رابطهٔ $q = ۲a + \frac{a}{۷} + r$ است. این روش ایجاب می‌کند که q بزرگتر از r باشد، که به‌وضوح وقتی a کوچک باشد، برقرار نیست.



شکل ۹. یافتن طول کمان q از قطعه‌ای از دایره ای با داشتن سهم a و شعاع r

گویا تلاش برای ادغام این دو سنت هندسی بسـیار رایـج بـوده اسـت. رسـالهٔ اشـکال التأسـیس شمس‌الدین سمرقندی (د ۷۰۱ق) اثری مقدماتی برای علوم محاسباتی است که به طـور خـاص بـه

۱. در متن‌های عربی «تکسیر» به معنی «اندازه‌گیری مساحت» به کار می‌رفت. م
۲. بخش‌هایی از شبه جزیرهٔ ایبری که زیر سلطهٔ سلسله‌های مسلمان بود.

جبر و «مساحه» اطلاق می‌شود. اما ۳۵ قضیهٔ آن از قضایای هندسی موجود در اصول اقلیدس، شامل ۲۹ قضیه از مقالهٔ اول، گرفته شده است. با آن که اشکال التأسیس بیشتر از یک رسالهٔ عملی به اصول نزدیک است، عباراتی را می‌یابیم که به تطبیق قضیه‌ها برای استفاده در زمینه‌های دیگر کمک می‌کند. مثلاً قضیهٔ ۳۱ آن، برگرفته از قضیهٔ اول مقالهٔ دوم اصول (بنگرید به بحث قبلی)، می‌گوید:

[حاصل] ضرب چیزی در چیز دیگر برابر است با ضرب‌های یکی در اجزای دیگری (سمرقندی ۲۰۰۱، ص ۱۰۹).

این بیان از قضیه بسیار عملی‌تر یا شاید جبری‌تر از آن قضیه است.

هندسه در زمینه‌های دیگر

هندسه بر بیشتر زمینه‌های زندگی تأثیر می‌گذارد، پس عجیب نیست که روش‌های برگزیده توسط هندسه‌دان‌ها برای انجام کار خود در جوامع اسلامی، بر سایر رشته‌ها تأثیر گذاشت. چند مورد از آنها را اینجا شرح می‌دهیم.

نجوم: شکلی از هندسهٔ کاربردی محسوب می‌شد؛ نجوم ریاضی به‌شدت بر روش‌های هندسی متکی بود. الگوهای پیش‌بینی موقعیت اجرام آسمانی بر اساس حرکات دایره‌ها و عمدتاً ملهم از مجسطی بطلمیوس (ح ۱۰۰-۱۷۰م) بود. کاربرد رصدهای کمّی و نیاز به پیش‌بینی‌های کمّی پدیده‌های نجومی، هندسه را به اندازه‌گیری واداشت، اما این امر به جای استفاده از ابزارهای مساحی، با گسترش دامنهٔ هندسهٔ نظری انجام شد. در واقع، روش‌های نظری چون تجزیه و ترکیب اغلب به طور ضمنی یا صریح در کارهای نجومی وارد می‌شد. نمونه‌ای از کاربرد آن روش کوهی برای یافتن فاصله تا شهاب‌هاست (کوهی۲۰۰۱ب، ۲۰۰۱ج، ۲۰۰۲).

مثلثات مبنای ریاضی در نجوم بود؛ ابزار اولیه سینوس بود که به عنوان پیشرفتی نسبت به وتر یونانی از هند گرفته شد. روش‌های هندسی با شروع از مسئله‌ای که مثلثات با آن شروع می‌شود، یعنی محاسبهٔ مقادیر سینوس کمان‌های داده شده چیزی را تجویز کردند که در مثلثات قابل قبول محسوب می‌شد. برخی از این مقادیر، به عنوان مثال مضرب‌های ۳ درجه را می‌توان با استفاده از معادل‌های کمّی ترسیم‌های با خط‌کش و پرگار یافت. با این حال، بیشتر مقادیر (از جمله سینوس یک درجه) را نتوانستند بیابند. آنها به روش‌هایی معادل تثلیث زاویه نیاز داشتند. بسیاری از نویسندگان به پیروی از بطلمیوس، این مقادیر را بین دو کران قرار دادند؛ مثلاً جمشید کاشانی (د ۸۳۲ق) منجم ایرانی، در زیج خاقانی رابطهٔ زیر را یافت:

$$۰.۰۱۷۴۵۲۴۴ > \sin ۱^\circ > ۰.۰۱۷۴۵۲۳۸$$

اما این کران‌ها به ما مقدار دقیق $\sin ۱^\circ$ را نمی‌دهد. پس کاشانی (همچون همکارانش) با گرفتن

میانگین کران‌ها مجبور به تقریب زدن می‌شود. چندین منجم از جمله ابن هیثم و سموأل بن یحیی مغربی (د ۵۷۰ق) با این کار مخالفت کردند. دومی تا آنجا پیش رفت که برای رفع مشکل، جدول سینوسی برای دایره‌ای که به جای ۳۶۰ جزء به ۴۸۰ جزء تقسیم شده بود، تهیه کرد (ابن هیثم ۱۹۸۵، ص ۱۲). مسئله حل نشد تا اینکه کاشانی بعداً $\sin 1^\circ$ را به عنوان جواب معادلهٔ درجهٔ سوم $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ یافت که در این مسیر با انتقال به جبر محدودیت‌های روش هندسی برطرف شد.

نجوم ریاضی با شکل‌هایی روی کرهٔ سماوی سر و کار دارد و بنابراین هندسهٔ کره برای آن اساسی است. نویسندگان یونانی هندسهٔ کروی مانند تئودوسیوس (اواخر قرن دوم پیش از میلاد) و منلائوس (شکوفایی در سدهٔ نخست میلادی) کاربردهای نجومی را دقیقاً زیر سطح پنهان نگه داشتند، اما نویسندگان عرب معمولاً چنین دغدغه‌هایی نداشتند (طوسی ۲۰۰۳). در طول قرن چهارم هجری، مثلثات کروی بر همان دو قضیه از هندسهٔ کروی منلائوس که بطلمیوس در مجسطی استفاده کرده بود، تکیه داشت. اما در اواخر قرن، تعدادی قضایای جدید مانند قاعدهٔ چهار کمیت در شرق جهان اسلام بازیابی شد (منلائوس ۲۰۰۶؛ بیرونی ۱۹۸۵م). مطالعهٔ هندسهٔ کروی با علاقه از چندین جهت تقویت شد. اول جنبه‌هایی از شعائر اسلامی که مستلزم روش‌های نجومی متنوع به‌ویژه تعیین سمت قبله بود. دوم ناشی از مسائل ضروری بود که در مطالعهٔ ریاضی احکام نجوم پدید آمد.[1] سرانجام سنتی اساسی در مورد موضوع تعیین زمان روز با استفاده از ارتفاع خورشید شکل گرفت.

در مورد رابطهٔ بین هندسه و نجوم، به مطالعهٔ تصویر کره روی صفحه هم می‌توان اشاره کرد. انگیزهٔ این امر طراحی ابزارهای نجومی، به‌ویژه اسطرلاب بود، که تجسمی از تسطیح کرهٔ سماوی است. به‌کارگیری تسطیح در اسطرلاب موفقیت‌آمیز بود زیرا دایره‌های روی کره به دایره‌ها یا خطوط روی صفحه تصویر می‌شوند، و این ساختن دستگاه را نسبتاً آسان می‌کند. چالش ترسیم منحنی‌های مختلف بر روی اسطرلاب بارها پیش آمد. انواع اسطرلاب بر اساس انواع دیگر تصویر کره - به‌ویژه تصویر هم‌فاصلهٔ سمتی- مطالعه شد، اگرچه چنین اسطرلاب‌هایی به جا نمانده است. سرانجام در دو نقشهٔ جالب از جهان مربوط به قرن ۱۱ هجری تصویری به کار رفت که مکه در مرکز آن بود و جهت و فاصله تا مکه را برای همهٔ مکان‌ها نشان می‌داد.[2]

نورشناخت: ابونصر محمد فارابی، فیلسوف اوایل قرن چهارم هجری، در کتاب احصاء العلوم خود، نورشناخت را به عنوان علمی در میان علوم ریاضی که به‌سختی می‌توان آن را از هندسه متمایز

۱. بنگرید به: ترجمهٔ فارسی این مقاله («مفاهیم بیت، شعاع و تسییر در احکام نجوم دورهٔ اسلامی») که در میراث علمی (سال دهم، شمارهٔ پیاپی ۱۹ و ۲۰، ۱۴۰۰، ص ۱۶۱-۱۶۵) چاپ شده‌است.

۲. بنگرید به مقالهٔ «اسرار قبله‌نماهای اصفهان»، نوشتهٔ یان پ. هوخندایک، میراث علمی، سال ۱، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۱، ص ۲۱-۳۵.

کرد، آورده است. گرچه وضع پیچیده‌تر از این است، می‌توان گفت که مطالعهٔ نورشناخت در دورهٔ خلافت عباسیان از اپتیکای اقلیدس، اثری عمدتاً متکی بر روش‌های هندسی الهام گرفته بود. گفته‌اند که شرح ابواسحاق کندی بر اپتیکای اقلیدس مطالعهٔ این موضوع را از هندسه دور و به واقعیت فیزیکی نزدیکتر کرد (کندی ۱۹۹۷). بی‌شک اثر محوری عربی در این زمینه، کتاب المناظر ابن هیثم بود، مبتنی بر این دیدگاه که پرتوها از جسم به چشم می‌روند نه از چشم به جسم. نظریهٔ نورشناختی ابن هیثم از محدودهٔ هندسه فراتر می‌رفت و حتی شامل بحثی در مورد جنبه‌های روان‌شناختی بینایی بود، اما همچنان به‌شدت بر روش‌های هندسی تکیه داشت. به عنوان مثال، مسئلهٔ معروف ابن هیثم، آینه‌ای کروی، یک نقطهٔ دید و یک نقطهٔ تابش را مطرح می‌کند و تعیین نقطهٔ بازتابش در سطح آینه را می‌طلبد (ابن هیثم ۱۹۸۹، ۲۰۰۲).

موضوع «آینه‌های سوزان»، سطوحی که باعث تمرکز پرتوهای نور در یک مکان خاص می‌شود مورد توجه ویژهٔ هندسه بود. با الهام از هندسهٔ باستانی دیوکلس (شکوفایی ۱۹۰ ق.م.)، شماری از دانشمندان مسلمان از قرن چهارم هجری (از جمله کوهی، ابوالوفا و ابوسعد علاء بن سهل) از نظریهٔ مخروطات برای کشف خواص آینه‌هایی به شکل سهمی‌وار و هذلولی‌وار استفاده کردند (دیوکلس ۱۹۷۶، ۲۰۰۰؛ ابن هیثم۱۹۹۳؛ دیوکلس و دترومس ۱۹۹۷).

معماری: اینکه هندسه نقش مستقیمی فراتر از دستورهای اصلی مساحی در معماری داشته است یا نه، روشن نیست. می‌دانیم که تعدادی از هندسه‌دان‌ها، از جمله ابوالوفا، ابن هیثم، کرجی (د ۴۱۹ق) و کاشانی، در مورد مسائلی مستقیماً الهام گرفته از معماری نوشته‌اند. اما نمی‌دانیم که آیا این آثار را بنایان عملاً به کار می‌بردند یا نه. مفتاح الحساب کاشانی شامل مطالعاتی در مورد طاق، قبّه (گنبد) و مقرنس است. مثلاً کاشانی حجم و مساحت سطوحی با ویژگی‌های معماری را که می‌توانند به عنوان سطوح دوار حول یک محور در نظرگرفته شوند برآورد کرد. با تکیه بر قضایا و ترسیم‌های اقلیدس و ارشمیدس، برآوردهای او با خطایی کمتر از دو درصد دقیق بود.

کاربردهای هندسه فراتر از طراحی ساختمان به نقوش زینتی روی دیوارها گسترش یافت. هنرمندان با هندسه‌دان‌ها گفتگو می‌کردند تا به آنها در ترسیم نقش‌های پیچیده‌ای که امروزه در کاخ‌هایی مانند الحمرا می‌بینیم کمک کنند که منجر به آثاری چون کتاب فی ما یحتاج إلیه الصانع من الاعمال الهندسیه از ابوالوفا شد. موضوع مورد توجه ویژه در اینجا انتخاب روش است: درحالی که (چنانکه دیدیم) هندسه‌دان‌ها استفاده از مقاطع مخروطی را بر ترسیم‌های «گرایشی» ترجیح می‌دادند، هنرمندان به دلایل منطقی، از ترسیم‌های گرایشی استقبال می‌کردند، زیرا اجرای آن‌ها آسان‌تر بود.

این مطالب به هیچ‌وجه شامل کل تأثیرات هندسه بر جنبه‌های مختلف جامعه نیست. چنان‌که می‌توان برای موضوعی چنین فراگیر انتظار داشت، دانش هندسه‌دانان و راه‌هایی که برای اندیشیدن و عمل به آن برگزیدند، به شکل‌گیری راه‌های نگرش جوامع اسلامی به دنیا کمک کرد.

منابع

Abū Kāmil. ed. and ann. Sesiano, J. 1996. "Le *Kitāb al-Misāḥa* d'Abū Kāmil," *Centaurus* 38, pp. 1–21.

Abū Kāmil. ed., tr. and ann. Sesiano, J. 2014. "Abū Kāmil's *Book on Mensuration*," in Sidoli, N. and Van Brummelen, G., eds. *From Alexandria, Through Baghdad*. New York: Springer, pp. 359–408.

Abū al-Jūd. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2010. "Les constructions géométriques entre géometrie et algèbre: L'épître d'Abū al-Jūd à al-Bīrūnī," *Arabic Sciences and Philosophy* 20, pp. 1–51.

Apollonius. ed., tr. and ann. Toomer, G. 1990. *Conics, Books V to VII: The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banū Mūsā*. 2 vols. New York: Springer.

Apollonius de Perge. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2008–2010. *Apollonius de Perge, Coniques*. 5 vols. Berlin: De Gruyter.

al-Bīrūnī. ed., tr. and ann. Debarnot, M.-T. 1985. *Kitāb Maqālīd ʿilm al-Hayʾa: La Trigonométrie Sphérique chez les Arabes de l'Est à la Fin du Xe Siècle*. Damascus: Institut Français de Damas.

Diocles and "Dtrūms". ed., tr. and ann. Rashed, R. 1997. "Dioclès et Dtrūms: Deux traités sur les miroirs ardents," *Mélanges Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire* 23, pp. 1–155.

Diocles. ed., tr. and ann. Toomer, G. 1976. *Diocles on Burning Mirrors: An Arabic Translation of the Lost Greek Original*. New York: Springer.

Diocles *et al*. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2000. *Les Catoptriciens Grecs*]. Vol. 1. Paris: Société d'Édition Les Belles Lettres.

Euclid. ed., tr. and ann. Kheirandish, E. 1999. *The Arabic Version of Euclid's Optics*. New York: Springer.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Hogendijk, J. 1985. *Ibn al-Haytham's Completion of the Conics*. New York: Springer.

Ibn al-Haytham, Ibn Sahl and al-Qūhī. ed., tr. and ann. Rashed, R. 1993. *Géometrie et Dioptrique au Xe Siècle*: *Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*. Paris: Les Belles Lettres.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Rashed, R. 1979. "La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham," *Journal for the History of Arabic Science* 3, pp. 309–87.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Rashed, R. 1991. "La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham – L'analyse et la synthèse," *Mélanges d'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire* 20, pp. 31–231.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Rashed, R. 1993. "La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham – II. 'Les Connus'," *Mélanges d'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire* 21, pp. 87–275.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2000. *Les Mathématiques Infnitésimales du IXe au XIe siècle*. vol. 3: *Ibn al-Haytham: Théorie des Coniques, Constructions Géometriques et Géométrie Pratique*. London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2002. *Les Mathématiques Ininitésimales du IXe au XIe Siècle*. Vol. 4: *Ibn al-Haytham: Méthodes Géométriques, Transformations Ponctuelles et Philosophie des Mathématiques*. London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation.

Ibn al-Haytham. ed. Sabra, A. 1983. *Kitāb al-2, and 3 on Direct Vision*. Kuwait: National Council for Culture, Arts, and Letters.

Ibn al-Haytham. tr. and ann. Sabra, A. 1989. *The Optics of Ibn al-Haytham, Books I-III: On Direct Vision*. 2 parts. London: The Warburg Institute.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Sabra, A. 2002. *Kitāb al-Manāẓir of al-Ḥasan ibn al-Haytham. Books IV-V. On Reflection, and Images Seen by Reflection*. Safat: National Council for Culture, Arts and Letters.

Ibn al-Haytham. ed., tr. and ann. Voss, D. 1985. *Ibn al-Haytham's Doubts Concerning Ptolemy: A Translation and Commentary*. PhD dissertation. University of Chicago.

al-Khayyām, tr. and ann. Djebbar, A. 2002. "Épitre d'Omar Khayyam *Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide*," *Farhang* 14, pp. 79–136.

al-Khayyām. tr. Khalil, R. 2008. Algebra wa al-Muqabala: An Essay by the Uniquely Wise *ʿAb[d]el Fath Omar bin al-Khayyam on Algebra and Equations*. Reading: Garnet.

al-Khayyām. ed., tr. and ann. Rashed, R. and Djebbar, A. 1981. *L'Œuvre Algébrique d'al-Khayyam, Établie, Traduite et Analysée par Roshdi Rashed et Ahmad Djebbar*. Aleppo: Institute for the History of Arabic Science.

al-Khayyām. ed., tr. and ann. Rashed, R. and Vahabzadeh, B. 1999. *Al-Khayyam Mathématicien*. Paris: Librairie Scientiique et Technique Albert Blanchard (English translation: 2000. *Omar Khayyam the Mathematician*. New York: Bibliotheca Persica Press).

al-Kindī. ed., tr. and ann. Rashed, R. 1997. *Œuvres Philosophiques et Scientiiques d'al-Kindī*. Vol. 1: *L'Optique et la Catoptrique*. Leiden: Brill.

al-Kūhī. ed., tr. and ann. De Young, G. 1992. "Abū Sahl's Additions to Book II of Euclid's *Elements*," *ZGAIW* 7, pp. 73–135.

al-Kūhī. tr. and ann. Berggren, J. L. and Van Brummelen, G. 2001a. "Abū Sahl al-Kūhī's 'On Drawing Two Lines from a Point at a Known Angle'," *Suhayl* 2, pp. 161–98.

al-Kūhī. ed., tr. and ann. Berggren, J. L. and Van Brummelen, G. 2001b. "Abū Sahl al-Kūhī on the Distance to the Shooting Stars," *Journal for History of Astronomy* 32, pp. 137–51.

al-Kūhī. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2001c. "Al-Qūhī: From Meteorology to Astronomy," *Arabic Sciences and Philosophy* 11, pp. 157–204.

al-Kūhī. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2002. "Al-Qūhī: De la méteorologie à l'astronomie," *Oriens Occidens* 4, pp. 1–57.

al-Kūhī. ed., tr. and ann. Berggren, J. L. and Van Brummelen, G. 2002–2003. "From Euclid to Apollonius: al-Kuhi's Lemmas to the *Conics*," *ZGAIW* 15, pp. 165–74.

al-Kūhī. ed., tr. and ann. Berggren, J. L. and Van Brummelen, G. 2005. "Al-Kūhī's Revision of Book I of Euclid's *Elements*," *Historia Mathematica* 32, pp. 426–52.

Menelaus. ed., tr. and ann. Sidoli, N. 2006. "The Sector Theorem Attributed to Menelaus'," *SCIAMVS* 7, pp. 43–79.

al-Nayrīzī. tr. Lo Bello, A. 2003. *The Commentary of al-Nayrīzī on Book I of Euclid's Elements of Geometry*. Boston: Brill.

al-Nayrīzī. tr. Lo Bello, A. 2009. *The Commentary of al-Nayrizi on Books II-IV of Euclid's Elements of Geometry*. Boston: Brill.

al-Samarqandī. tr. and ann. De Young, G. 2001. "The *Ashkāl al-Taʾsīs* of al-Samarqandī: A Translation and Study," *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* 14, pp. 57–117.

al-Sijzī. ed., tr. and ann. Hogendijk, J. and Bagheri, M. 1996. *Al-Sijzī's Treatise on Geometric Problem Solving*. Tehran: Fatemi.

al-Sijzī. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2004. *Œuvre Mathématique d'al-Sijzi*. vol. 1: *Géometrie des Coniques et Théorie des Nombres au Xᵉ Siècle*. Leuven: Peeters

al-Ṭūsī. ed., tr. and ann. Pinel, P. and Taha, A. 2003. "Le travail d'al-Ṭūsī sur les *Sphériques* de Ménélaus: Établissement critique du texte, apport mathématique, interpretation astronomique," *Farhang* 15–6, pp. 33–109.