بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال سیزدهم، شماره‌های اول و دوم، سال ۱۴۰۳
شمارهٔ پیاپی: ۲۵ و ۲۶

تصویر پشت جلد: نقش کاشیکاری از مدرسهٔ الغبیگ در سمرقند با کتیبهٔ: العلم کنز [عظیم] لا یفنا (از حضرت علی (ع))

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۶۰،۰۰۰ تومان

فهرست

مقاله

معرفی کتاب

یادداشت‌های تاریخی

یادنامه‌ها

رسائل

زمینه‌های دانش ریاضی در جهان اسلام

شباهت‌ها و تفاوت‌ها[۱]

احمد جبار[۲]
ترجمهٔ مهسا راقب[۳]

از پایان قرن دوم تا آغاز قرن سیزدهم هجری، متون ریاضی تهیه شده در جهان اسلامی عمدتاً به زبان عربی نوشته شده‌اند. اما تعداد قابل توجهی از این متون به زبان‌های دیگر، از جمله فارسی، ترکی، عبری و به میزان کمتری به زبان‌های بربری و دیگر زبان‌های آفریقایی، آسیایی و اروپایی نیز تألیف شده‌اند. در اینجا، به بررسی آثار نگاشته شده به زبان عربی که تاکنون تحلیل شده‌اند، می‌پردازم. این آثار را به چند دسته می‌توان تقسیم کرد. نخست نتایج پژوهش‌هایی هستند که به گسترش آثار یونانی، فارسی یا هندی که از پایان قرن دوم تا نیمهٔ قرن چهارم هجری ترجمه شده است، پرداخته‌اند. دوم، کتاب‌های آموزشی و همچنین کتب درسی که به گروه‌های مختلفی از کاربران (مانند حسابداران، دفترداران، بازرگانان، معماران، مشاوران ارث و میراث، نقشه‌برداران و تقسیم‌کنندگان زمین) مرتبطند. نویسندگان این آثار متعلق به اقوام، ادیان و جوامع فرهنگی مختلفی هستند که در جهان اسلامی زندگی می‌کردند.

در دهه‌های اخیر، تنها تعداد محدودی از مطالعات تطبیقی در مورد محتوای این مجموعه انجام شده است. این مطالعات هنوز قادر به عرضهٔ نتایج قطعی در مورد مسائلی نظیر وجود روش‌های خاص محلی یا منطقه‌ای مرتبط با موضوعات مورد بررسی، زبان ریاضی، گرایش تحقیق یا حتی پیدایش و توسعهٔ یک بخش خاص یا یک رشته نیستند. چنان که در ادامه بیان خواهد شد، این مطالعات به دلیل شباهت‌های متعدد و وجود منابع متنوعی که در آغاز توسعهٔ این روش وجود داشت، اتحاد کلی در روش ریاضی به زبان عربی را تأیید می‌کنند. از سویی دیگرهمان منابع،

---

۱. این مقاله ترجمه‌ای است از:
Djebbar, Ahmed, “Mathrmatical Knowledge Fields in the Islamic World: Similarities and Differences”, in *Routledge Handbook on the Sciences in Islamicate Societies*, ed. by Sonja Bretjes, first edition, Routledge, 2022, pp. 555-565.

۲. Ahmed Djebbar استاد بازنشستهٔ دانشگاه علم و فناوری لیل در فرانسه، مورخ ریاضیات، ahmed.djebbar@yahoo.fr
۳. پژوهشگر آزاد، mahsaragheb@gmail.com

ویژگی‌های خاصی در روش‌هـای ریاضـی را کـه در دوره‌هـا و منـاطق مختلـف در جهـان اسـلامی مشاهده می‌شود آشکار می‌سازند.

میراث پیش از اسلام: مبنای فعالیت‌های ریاضی در جهان اسلامی

اگرچه ریاضیات تهیه شده، آموزش و منتشر شده در جهان اسـلامی بـه زبان‌هـای مختلفـی غیـر از عربی نیز بیان شده است، اما ریاضیات برگرفته از یک میراث مشترک که توسـط روش‌هـای مختلـف غنی شده باشد، از قرن دوم هجری به بعد، توسعه یافت و ترکیب یا تلفیق این عناصر مختلف از این میراث مشترک، مبنای فعالیت‌های ریاضی در جهان اسلامی شد. هرچند بخش‌های قابل شناسـایی این میراث از طریق ترجمهٔ متونِ به زبان سانسکریت و به‌ویژه یونانی ادامه یافت، اما بخـش دیگـری از این میراث با منشأ محلی (خاورمیانه، مصر) یا بسیار دورتـر (چـین) وجـود دارد. بـاوجود اینکـه شناسایی منابع باستانی و مسیرهای گسترش آنها دشوار است اما نمی توان منکر شد که این منابع بـه طور مساوی هم به فعالیت‌های ریاضی کمک کرده و هـم در توسـعهٔ آنچـه بـه‌طور معمـول «دانـش علمی» نامیده می‌شود، نقشی اساسی داشتند.

میراث از آسیا و یونان

اولین میراث باستانی از هند شامل مفاهیم اساسـی ریاضـی مثـل مثلثـات (سـینوس و کسـینوس) و حساب (صفر و ارقام نه‌گانه‌ای که در شمارش ده‌دهی به‌کار می‌روند) بود. همچنین الگوریتم‌هـایی برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعـداد صـحیح، حسـاب کسـرهای معمـولی یـا شصـت‌گانی و استخراج جذر از اعداد صحیح یا کسرها وجود دارد (بنگرید به ادامهٔ مقاله). به این مجموعهٔ غنی از کارها، می‌توان روش‌های حل مسائل را هم افزود. اگرچه این روش‌ها به‌طور صریح به سنت هنـدی مرتبط نیستند، اما با توجه به اینکه در آثار سانسکریت پیش از ظهور اسلام ظاهر شده‌اند، منشأ آنهـا شاید از هند باشد. همچنین ممکن است منشأ آنها از چین بوده و از طریق هند منتقل شـده باشـند، مانند روش خطأین (برای حل معادله‌ای با یک مجهـول) و برخـی دسـته‌های خـاص از مسـائل (در مورد پرندگان و باقیمانده‌ها).

انتشار میراث حساب هندی و به‌طور کلی میراث آسیا به زبان عربی برای اولین بـار در رسـاله‌ای از خوارزمی (د حدود ۲۳۵ ق) به نام الکتاب فی الحساب الهندی (خـوارزمی ۱۹۹۷، ۱۰۷ـ۱۲۸) پدیدار شد. گردش دانش از هند و آسیا عاملی در پیدایش سبک‌های خاص و جدید حساب بود، اما ماهیت، هدف‌ها و روش‌ها یا کارکردهای آن‌ها را تغییـر نـداد. بـه ایـن ترتیـب، ارقـام هنـدی بـا دو نمادگذاری مختلف، یکی در شرق اسلامی و دیگری در غرب (اندلس و مغرب) بـه کـار می‌رفـت. برای روش خطأین، تنها نام آن از یک منطقه به منطقهٔ دیگر تغییر کرد: در شـرق بـه «روش خطـأین»

(روش دو خطا) (ابن اکفانی ۱۹۹۸، ۸۵) و در نوشته‌های مغرب به «روش دو کفهٔ ترازو» معروف بود (ابن بنا ۱۹۶۹، ۶۹-۷۱).

در مورد نقش یونان، این مشارکت به‌خاطر گستردگی و تنوع محتوایش بسیار مهم‌تر بود. از اواخر قرن دوم هجری به بعد یونان، برای ریاضی‌دانان و ستاره‌شناسان مستقر درمراکز علمی که در مناطق مختلف جهان اسلامی شروع به ظهور و توسعه کرده بودند، به مرجع غیرقابل اجتنابی تبدیل شد.[۱] مشابه نقش هند، تاثیر ریاضیات یونان باستان و به‌ویژه دوران هلنیستی به‌طور گسترده‌ای در جهان اسلامی منتشر شد و به‌تدریج جایگاه مهمی در برنامه‌های آموزشی ریاضی‌دانان متاخر در سراسر منطقه پیدا کرد. به‌عنوان مثال، اصول اقلیدس (قرن سوم پیش از میلاد) مطالعه و بر آن تفسیرهایی نوشته شد که از جمله دو نسخهٔ عربی با بیشترین ارجاع که عبارتند از ترجمهٔ حجاج (د ۲۱۳ق) و ترجمهٔ اسحاق بن حنین (د ۲۹۸ق) که توسط ثابت بن قُرّه (د ۲۸۸ق) اصلاح شد. این نسخه‌ها منشأ مطالعات زیادی از جمله در تفسیرها، خلاصه‌ها، تحریرهای جدید، آثار جانبی و اثبات‌های جدید برای برخی از قضایا شدند. اما این مشارکت‌ها تمام عناصر خاص روش‌های هندسی هر منطقه را بیان نمی‌کردند. همین امر را می‌توان دربارهٔ مخروطات آپولونیوس (قرن سوم پیش از میلاد) و اُکَر منلاؤس (در حدود سال ۱۰۰م) گفت که تحریرهای جدیدی از هر دو در هلال اخضر[۲]، آسیا و اندلس نگاشته شد (هوخندایک ۱۹۹۱، ۱۹۹۶).

در نظریهٔ اعداد، به نظر نمی‌رسد که غرب اسلامی با حساب دیوفانتوس (قرن ۳ یا ۴م) آشنا بوده باشد. اما روش نیکوماخوس (د حدود ۱۲۰م) آموزش داده می‌شد و الهام‌بخش شرح‌ها و آثار جدیدی شد، مانند آثار ابن سید (قرن ۵ هجری) و ابن طاهر (قرن ۶ هجری) در اندلس و ابن منعم (د ۶۲۶ق) و همچنین ابن بنّا (۶۵۴-۷۲۱ق) در مغرب (جبار ۲۰۰۰، ۵۷-۷۰). سه نویسندهٔ اول به گسترش محتوای مقدمه‌ای بر حساب کمک کردند. رویکرد نویسندهٔ چهارم ویژگی‌های خاص منطقه‌ای را نشان می‌دهد و مباحثی مرتبط با ترکیبیات را معرفی می‌کند که از ویژگی‌های منحصر به فرد غرب اسلامی است؛ در بخش دوم این مقاله به آن خواهیم پرداخت.

میراث یونانی در مثلثات، مبتنی بر مفهوم «وتر زاویهٔ مضاعف»، مدتی با مفاهیم هندی که قبلاً ذکر شده و در آثار خوارزمی و برخی از همکارانش، مانند حَبَش حاسب (د پس از ۲۵۵ق؛ دبارنو ۱۹۹۷، ۱۶۳-۱۹۸) ادغام شده بود، همزیستی داشت. از اواسط قرن دوم هجری، ستاره‌شناسان در بغداد ابزارها و اشیاء جدیدی معرفی کردند که اجزای سازندهٔ موضوع نوینی بودند که تا آغاز قرن ۵

۱. برای فهرستی از آثار ریاضی که از یونانی ترجمه شده‌اند، به علاوهٔ مطالعاتی که الهام گرفته و توسعه یافته‌اند، بنگرید به: Sezgin 1974، ص ۱۰۳-۱۱۵؛ ۱۲۸-۱۳۵؛ ۱۳۹-۱۴۳؛ ۱۵۴-۱۵۶؛ ۱۶۱-۱۶۴؛ ۱۶۵-۱۶۶؛ و ۱۷۹.

۲. هلال اخضر: نام بخش تاریخی خاورمیانه شامل شرق دریای مدیترانه، بخش‌های غربی ایران، میانرودان و مصر باستان. م

هجری توسعه یافت. از ایـن زمـان بـه بعـد، دانشـمندان معروفـی چـون بیرونـی (۳۶۲-۴۴۴ق) و همچنین دانشمندان ناشناسی مانند نویسندهٔ جامع قوانین علم‌الهیئة، شروع به انتشار آثـاری کردنـد که با رساله‌های مربوط به نجوم تفاوت داشتند، هرچند که به‌ویژه برای متخصصان این حـوزه نوشـته شده بودند (خیرالدینوا ۱۹۶۶، ۴۴۹-۴۶۴). محتوای این آثار به‌طور فزاینده‌ای به عرضـهٔ مفـاهیم و ابزارهای مثلثات متمایل شد و بدین ترتیب مقدمات استقلال این مبحث را که بعـدها بـه‌عنوان یـک رشتهٔ علمی مستقل درآمد، فراهم کرد.

منابع شناخته شده هیچ گونه تفاوت‌های منطقه‌ای در توسعهٔ مثلثات و حوزه‌های کاربرد آن نشان نمی‌دهند. در قرن‌های ۳ و ۴ هجری، گردش منابع ریاضی‌دانان و ستاره‌شناسان در مرکـز امپراتـوری ابتدا به دانشمندان سایر نقاط جهان اسلامی این امکان را داد که از میـراث پـیش از اسـلام از طریـق ترکیب و بازآرایی منابع هندی و یونانی بهره‌مند شوند. سپس دامنهٔ این منابع از طریق تعریف مفاهیم جدید، ابداع ابزارهای جدید و اثبات نتایج نو گسترش یافـت. ایـن مسـیر راه را بـرای مشـارکت‌های جدیدی بر مبنای همان اصول پیشین، اما این بار در مراکز علمی در حـول و حـوش هـلال اخضـر، مانند قاهره (دبارنو ۱۹۹۷، ۱۶۴، ۱۶۹، ۱۸۰، ۱۹۰-۱۹۱، ۱۹۴)، قرطبه (ویلوئنـدا ۱۹۷۹) و مراغـه (نصیرالدین طوسی ۱۸۹۱؛ جبار ۲۰۰۴، ۴۳۲-۴۳۳) باز کرد.

میراث محلی

بخش سوم میراث پیش از اسـلام، منشـأ محلـی دارد و بـا منـابع مکتـوب ذکـر شـده در فهرسـت‌های کتاب‌شناسی عربی اولیه مرتبط نیست. نخسـت، آنچـه ریاضـی‌دان قـرن ۴ هجـری، اقلیدسـی، آن را حساب عربی (اقلیدسی ۱۹۸۵، ۴۷) نامید و در زمان‌های دیگر در دیگر نقاط جهـان اسـلامی تحـت عنوان حساب مفتوح [= ذهنی] (ابن اکفانی ۱۹۹۸، ۸۴) ظاهر می‌شـود. در سـطح عملیـات اصـلی حساب، این به معنای حوزه‌ای است که تنها شامل ضرب، تقسیم و نسبت‌ها می‌شود. آثار جداگانـه‌ای به ایـن روش حسـاب اختصـاص یافتـه اسـت، بـه‌عنوان مثـال، التـذكرة بأصـول الحسـاب الفَـرَائِض (یادداشت‌هایی در اصول حساب و محاسبات ارث) اثر ابن خضـر (د ۴۶۰ق؛ ابـن الخضـر ۲۰۰۱). محتوای این روش به مرور زمان گسترش یافته و جزئیات خاصی از آن با آثار معرفی‌کنندگان مفـاهیم و روش‌های محاسباتی هند ادغام شده است. این امـر بـه‌ویژه در برخـی از راهنماهـای منتشـر شـده در اندلس و مغرب صادق است. تلقيح الأفكار في العلم برسوم الغبار (بارورسازی افکار با رسـم حـروف غبار) اثر ابن یاسمین (د ۶۰۱ق) به این دسته تعلق دارد. ترتیب عرضهٔ عملیات حسابی بـر روی اعـداد صحیح و کسرها در این اثر با سنت هندی متفاوت است. نویسنده ابتدا ضـرب، تقسـیم و نسـبت‌ها را بررسی می‌کند، سپس به جمع و تفریق می‌پردازد (ابن یاسمین ۱۹۹۳، ۱۰۳-۱۰۵).

همین حوزهٔ حساب شامل «حساب انگشتی» هم می‌شود که به آن «عقود انامل» یا «حساب ذهنی» نیز گفته می‌شود (سعیدان ۱۹۷۱، ۴۸-۵۶، ۴۱۶-۴۲۰). نخستین راهنماهای عربی که به جنبه‌های خاصی از این سنت پرداخته‌اند به‌دست ما نرسیده‌اند. احتمالاً راهنماهایی با عنوان «تجزیه و ترکیب» به این دسته تعلق دارند. قدیمی‌ترین این آثار به خوارزمی نسبت داده شده که با کتاب او در مورد روش‌های محاسبهٔ هندی متفاوت است (جبار ۲۰۰۲، ۲۱۶-۲۲۰). نویسندگان بعدی آثار خود را با همان عنوان منتشر کردند. اما از آنجا که هیچ‌یک از این نوشته‌ها به‌دست ما نرسیده، نمی‌توان گفت که آیا محتوای آنها به دلیل نیازها یا شیوه‌های محلی تغییر کرده است یا نه. تنها نوشته‌هایی که نسخه‌هایی از آنها هنوز وجود دارد، آنهایی هستند که در عناوینشان واژه‌های «عقود» (مفاصل) یا «ید» (دست) وجود دارد. این آثار استفاده از انگشتان در شمارش و عملیات حساب ذهنی را توضیح می‌دهند. اگرچه تولید آنها محدود به یک منطقهٔ خاص از جهان اسلامی نبوده، به نظر نمی‌رسد که گسترش آنها منجر به معرفی عناصر خاص به یک یا چند شیوهٔ محلی شده باشد (حاجی خلیفه ۱۹۸۲/۱۴۰۲، ۱: ۶۶۴-۶۶۵؛ ابن مغربی ۱۹۹۲).

همچنین باید به روش‌های شمارش با حروف الفبا توجه کنیم که از روش یونانیان در علم نجوم به ارث رسیده است که از یک دستگاه شمارش غیرموضعی استفاده می‌کردند. در نجوم اسلامی، این موضوع با استفاده از الفبای عربی بیان می‌شود: ۹ حرف برای کل ارقام، ۹ حرف برای مضارب ده و ۹ حرف برای مضارب صد. اما کاربران در غرب اسلامی این طرح را تغییر داده و ارزش برخی حروف را عوض کردند. اعداد ۶۰، ۹۰، ۳۰۰، ۸۰۰ و ۹۰۰، که در شرق اسلامی به‌ترتیب با حروف س، ص، ش، ض و ظ نشان داده می‌شدند، در غرب با حروف ص، ض، س، ظ و غ نمایش داده می‌شدند. همین دستگاه شمار در سنت قبطی هم هست، که با نمادهایی بیان می‌شود که گویا مستقیماً از حروف الفبای یونانی مشتق شده‌اند (سزیانو ۱۹۸۹؛ این‌ها همچنین «ارقام ثبت» یا «ارقام فاس» نامیده می‌شدند). در «حساب بیزانسی»، نوشتن و استفاده از این اعداد تفاوتی با اعداد قبطی ندارد. این دستگاه شمار که با افزودن علائمی زیر هر یک از ۲۷ نماد فوق، مضارب هزار، مضارب ده هزار و مضارب صد هزار را نشان می‌دهند به‌راحتی با نیازهای حسابداران سازگار شد (جبار و گرگور ۲۰۱۳، ۵۲-۵۷).

به طور کلی روش‌های حسابی که برای حل مسائل عملی یا به عنوان تمرین به کار می‌رفتند با توجه به منابع موجود حاکی از تعدادی الگوریتم است که ریشه‌های آن‌ها هنوز روشن نیست. ظاهراً این الگوریتم‌ها را حسابداران، پیش از ظهور جبر به عنوان یک رشتهٔ علمی، ابداع کرده و به کار برده بودند. استفاده از برخی روش‌ها محدود به زمان و مکان خاصی بوده است. برای مثال، روش موسوم به «حساب باب»، که به کمک آن می‌توان مشکلات خاصی (ارث) را به کمک ترسیم هندسی حل

کرد، از این دسته است (لاعبید ۱۹۹۰، ۶۷-۷۹). روش‌های دیگر به طور گسترده‌ای منتشـر شـده و ویژگی‌های منطقه‌ای خود را از دست داده‌اند. به عنوان مثال، می‌توان به روش معکوس اشاره کرد[۱].

به این دسته از روش‌های حسابی روش‌هایی که می‌توان آن‌ها را «پیش‌جبری» نامید نیز مـی‌تـوان افزود. این روش‌ها شامل یک رشته عملیات حسابی مشابه با الگوریتم جبر برای حل معادلـۀ درجـۀ دوم هستند، اما به شیوه‌ای که در لوح میخی BM۱۳۹۰۱[۲] آمده، توصیف شده‌اند. با توجه بـه منـابع ریاضی موجود از شرق اسلامی، به نظر می‌رسد که این روش با رشد جبر از بـین رفتـه و بـه‌سـادگی توسط کاربران این منطقه از جهان اسلامی رها شده است. اما این اتفاق در اندلس نیفتاد، زیرا بـرای نخستین بار به نظر می‌رسد که در یک رساله از قـرن چهـارم هجـری، یعنـی الرسـالة فـی التکسـیر (رسالة در اندازه‌گیری مسـاحت) اثـر ابـن عبـدون (۳۱۱- پـس از ۳۶۶ق)؛ جـدول ۱ بـا شـکل ۱؛ (همچنین بنگرید به تورو-دنگن ۱۹۳۸، ۱؛ ابن عبدون ۲۰۰۵ [منابع ثانویه]، ۳، ۲۹) دوباره ظاهر می‌شود. این روش در نوشته‌های بعدی از همان منطقه نیز وجود دارد (بوزار ۱۹۶۸، ۷۰).

مقایسۀ بین دو بیان از یک مسئلۀ ریاضی در فاصلۀ زمانی حدود ۲۷۰۰ سال	
رسالۀ ابن عبدون (سدۀ ۴ هجری)	**لوح میخی ۱۳۹۰۱ BM حدود ۱۷۵۰ پیش از میلاد**
صورت مسئله: اگر کسی بگوید: اضلاع و مساحت آن [مربع] را جمع کرده‌ایم و مجموع آنها صد و چهل است. اندازۀ هر ضلع چقدر است؟ **حل:** - تعداد اضلاع را جمع کن، نتیجه چهار است . - نصف این عدد را بگیر، نتیجه دو است. - این عدد را در خودش ضرب کن، نتیجه چهار است. - این را به صد و چهل اضافه کن، نتیجه صد و چهل و	**صورت مسئله[۳]:** مجموع یک ضلع و مساحت مربعی $\frac{۳}{۴}$ است. **حل:** - ۱ را نصف کن، و نتیجه را که $\frac{۱}{۲}$ است نگه دار. - $\frac{۱}{۴}$ (مجذور $\frac{۱}{۲}$) را به $\frac{۳}{۴}$ اضافه کن: می شود ۱. - آن نصف را که نگهداشته‌ای از ۱ جدا کن: ضلع $\frac{۱}{۲}$ است.[۴]

۱. این روش شامل شروع از آخرین عملیات مورد نیاز در بیان یک مسئله و انجام وارونه آن عملیات به صورت متوالی است تا به داده‌های ابتدایی برسیم. به عنوان مثال: اگر ما به دنبال مقداری برای c هستیم که معادلۀ زیر را برآورده کند: $۲(۲c - ۱) = ۱$ ، ابتدا ۱ را بر ۲ تقسیم کرده، ۱ را می‌افزاییم و نتیجه را دوباره بر ۲ تقسیم می‌کنیم. این عمل نتیجۀ موردنیاز را به دست می‌دهد.

۲. British Museum (موزۀ بریتانیا)

۳. این ترجمه بر اساس هویروپ (۲۰۱۵، ص ۲۵) است. تصویر عرضه شده در شکل ۱ از همان منبع گرفته شده است و در لوح میخی یافت نمی‌شود.

۴. به زبان امروزی: $x + x^{۲} = \frac{۳}{۴}$

←

چهار می‌شود.
- ریشهٔ عدد را بگیر، نتیجه دوازده است.
- از آنچه باقی مانده نصف چهار را کم کن.
- این مقدار هر ضلع است.

جدول ۱

اولین پیشرفت‌های جبر به‌عنوان یک رشته در قرن سوم و اوایل قرن چهارم هجری در آثار خوارزمی (راشد ۲۰۰۷)، ابن ترک (نیمهٔ اول قرن سوم هجری؛ سیلی ۱۹۸۵) و سپس ابوکامل (حدود ۲۳۵- حدود ۳۱۷ق؛ ابوکامل ۲۰۱۲) ظاهر شد. تعاریف آن‌ها از مفاهیم جدید، روش‌های آن‌ها برای یافتن راه‌حل‌ها، انواع مسائلی که حل کردند و اصطلاحات آن‌ها، به‌عنوان شیوه‌های پذیرفته شده در مناطق مختلف جهان اسلامی رواج یافت. اما آثار مکتوب بعدی چنین رواجی نداشتند و برخی از آثار مهم، مانند رساله‌های کرجی (در حدود ۴۲۰ق)، عمر خیام (۴۳۹-حدود ۵۱۷ق)، سمؤال (د ۵۷۰ق) و شرف‌الدین طوسی (د حدود ۶۱۰ق) عرضه شد که ظاهراً به دیگر مراکز علمی امپراتوری‌های اسلامی مانند مغرب و اندلس راه نیافت. با در نظر گرفتن تمامی نوشته‌هایی که به ما رسیده است، این‌ها تأثیری بر توسعهٔ جبر در این مناطق نداشتند. احتمالاً از قرن سوم-چهارم هجری به بعد، برخی پیشرفت‌های محتوایی جبر مشابه آنچه در شرق پدید آمد، در غرب نیز به‌طور مستقل حاصل شده باشد. ابن خلدون (۷۳۲-۸۰۸ق) مورخ بیان می‌کند که کارهای جبری در اندلس پیش از قرن هشتم هجری مهم بوده‌اند (ابن خلدون ۲۰۰۵، ۵: ۲۳۱-۲۳۲). اما منابع زندگی‌نامه-کتاب‌شناسی ریاضیاتی که باقی مانده‌اند، این فرض را تأیید نمی‌کنند. ظاهراً از اواسط قرن چهارم هجری به بعد، اساساً رویکردهای جدید در جبر توسط ریاضیدانانی که در بغداد یا شهرهای ایران و آسیای مرکزی فعالیت می‌کردند ابداع شده باشد.

هندسهٔ عملی، برخلاف هندسهٔ نظری یونانی که قبلاً ذکر شد، آخرین فصل در میراث محلی را تشکیل می‌دهد. این شاخه به بررسی ویژگی‌های اشکال مسطح و حجم‌های ساده، روش‌های تعیین یک جزء از شکلی با دانستن اجزای دیگر آن، و فنون اندازه‌گیری و تقسیم که در نقشه‌برداری و تقسیم اراضی مفیدند، می‌پردازد.

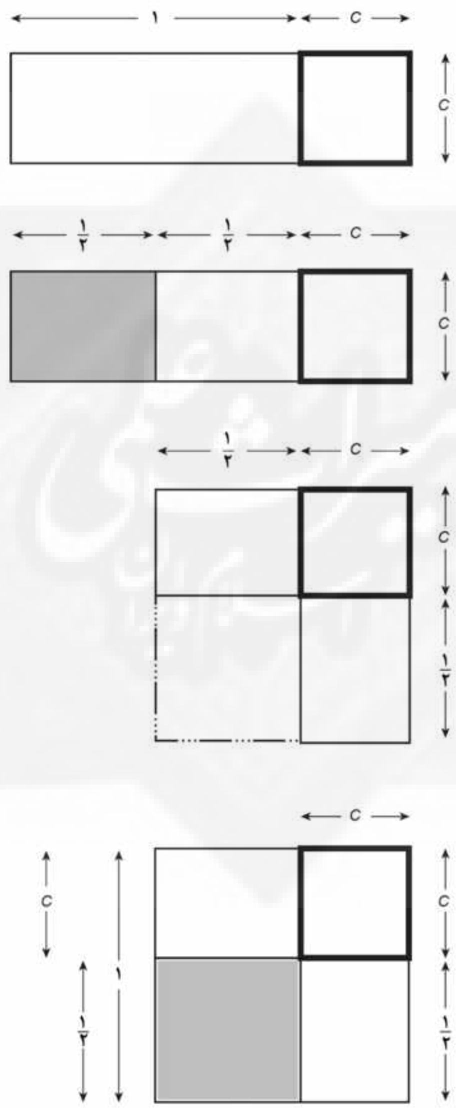
→

$$\frac{۱}{۴}+x+x^{۲}=۱$$

$$x+\frac{۱}{۲}=۱$$

$$x=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

عناصر اصلی این رشته در رساله‌های نوشته شده در مناطق مختلف دنیای اسلامی به چشم می‌خورد. شباهت‌هایی در دستورهای یافتن مقادیر مورد نظر، اصطلاحات به‌کاررفته در برخی بخش‌ها، و همچنین در روش‌های حل مسائل خاص وجود دارد. اما چنان که در بخش دوم این فصل خواهیم دید، اشتراکات خاص منطقه‌ای نیز در تعدادی از متون مربوط به آن مشاهده می‌شود.



شکل ۱ نمودارهای هندسی نشان‌دهندهٔ لوح خط میخی BM۱۳۹۰۱، عرضه شده توسط ینس هویروپ ۲۰۱۵. «مورد دیگری از پیشرفت در تاریخ جبر»، فیزیک، سری جدید۱/۱-۲: ۱-۳۸

اشتراکات خاص در برخی دوره‌های ریاضیات از قرن ۳ تا قرن ۹ هجری

اشتراکات خاص در زمینه‌های مختلف ریاضیات که در دنیای اسلامی توسعه یافته و تا به امروز شناخته شده‌اند، به دلایل متنوعی به وجود آمده یا ارتقا یافته‌اند. برخی از این اشتراکات نتیجهٔ نگرانی‌های فرهنگی عمومی و مرتبط با دو عامل بنیادین، زبان عربی و دین اسلام، بودند و برخی دیگر به توسعه‌های عملی در ریاضیات که به نیازهای خاص اجتماعی پاسخ می‌دادند، مرتبط هستند. این عوامل برای تمام ساکنان شهرهای اسلامی با ویژگی‌های فرهنگی و دینی مشابه مشترک است. اما بعد منطقه‌ای را نیز باید افزود، چنان‌که برخی از مراکز علمی-پژوهشی نسبت به دیگران در توسعهٔ رویکردهای جدید پیشرفت بیشتری داشته‌اند. در ادامه، نمونه‌هایی از اشتراکاتی که ویژگی‌های این روش‌های منطقه‌ای را نشان می‌دهند، عرضه می‌شود.

به نظر می‌رسد که در غرب اسلامی، پیشرفت در زمینه‌های قوانین مربوط به ارث و میراث باعث شد که برخی از نویسندگان قرن ششم هجری به تخصیص فصل‌های طولانی‌تری از مبحث کسرها در متون خود بپردازند. نمونه‌هایی از آن شامل کتاب فقه الحساب ابن منعم (فقه الحساب؛ ابن منعم ۲۰۰۵، ص ۲۳۷-۳۴۱) و کتاب البیان والتذکار فی علم اعداد غبار از حصّار (زنده در ۵۵۲ق؛ نسخهٔ خطی کتابخانهٔ ملی الجزایر، شمارهٔ ۲۷۱۲، برگ‌های ۱۴۶پ-۱۶۲ر) هستند. کسرها در مقالهٔ اول، حدود یک‌سوم از مطالب و در مقالهٔ دوم، بیش از دوسوم را در بر می‌گیرند. احتمالاً همین فرایند افزایش انواع کسرهای مورد استفاده در محاسبات، نیاز به گسترش نمادگذاری حسابی به دیگر حوزه‌ها فراتر از شیوه‌های شمارش را ایجاد کرده است. در اینجا نمی‌توان زمان‌بندی دقیقی برای نشان دادن زمان گسترش این نمادگذاری عرضه کرد، اما این نمادگذاری در آثار مذکور حصّار نیز دیده می‌شود. در این آثار، معرفی خط کسری جداساز صورت و مخرج در نوشتن کسرهای ساده ($\frac{n}{m}, n < m$) و استفاده از نمادهای دیگر برای سه نوع دیگر از کسرها را مشاهده می‌کنیم: کسر مسلسل (زنجیری) $\left(\frac{n_1 n_2}{m_1 m_2}\left[=\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}\left(\frac{1}{m_1}\right)\right]\right)$، کسرهای متمایز $\left(\frac{n_1 n_2}{m_1 m_2}\left[=\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}\right]\right)$ و کسرهای تقسیم شده $\left(\frac{n_1 n_2}{m_1 m_2}\right)$ و $\left(\left[=\frac{n_1}{m_1}\left(\frac{n_2}{m_2}\right)\right]\right)$.

این نمادگذاری همراه با اصطلاحات خاصی برای دو بخش کسر (صورت و مخرج) بود و شامل چندین اختصار برای توضیح عملیات حسابی اعمال‌شده بر روی کسرها (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و جذر) نیز می‌شد. این نمادگزاری، با تغییرات مختلف، در کتاب تلقیح الأفکار از معاصر حصّار، ابن یاسمین (ابن یاسمین ۱۹۹۳، ص ۱۳۷) و همچنین در میان ریاضیدانان قرن‌های ۷ و ۸ هجری مشاهده می‌شود. استثنایی در این مورد ابن بنّاء است که با محدود کردن بخش مربوط به کسرها به عملیات بنیادی، ابتکار عمل را به دست گرفت (جبار ۱۹۹۲).

نمی‌دانیم چه دلایلی موجب شد که ریاضیدانان ناشناسی در اندلس به معرفی نخستین نمادهای جبری در فصل‌هایی که به این علم اختصاص داده بودند، بپردازند. بنابراین، توضیح این تغییر جدید از طریق ملاحظات فرهنگی خاص آن بخش از جهان اسلام، دشوار است. تنها می‌توانیم بگوییم که نخستین نمونه‌های شناخته‌شده از این «نوآوری» به قرن ششم هجری برمی‌گردد و ممکن است در شهر سویل (اشبیلیه) پدید آمده و سپس به مغرب منتقل شده باشد. عنصر کلیدی در این نمادگزاری، استفاده از حروف ش، م و ك برای نشان دادن x ، $x^۲$ و $x^۳$ [1] و ترکیبات حروف دوم و سوم برای بیان تمام توان‌های بالاتر از ۳ است. این ویژگی منطقه‌ای به نوشتن چندجمله‌ای‌ها با درجات دلخواه گسترش یافت. بنابراین، دو روش برای بیان این مفاهیم وجود داشت: در شرق اسلامی، این مفاهیم از طریق جداولی که هر توان به ستونی ربط داشت، بیان می‌شد (سمؤال ۱۹۷۹، ۴۴-۵۶)، اما در مغرب، این مفاهیم با قرار دادن ضرایب برای هر عدد همراه با نشانه‌ای که درجهٔ مربوطه را بیان می‌کرد، مشخص می‌شد (لامربط ۱۹۸۱، ۷۶-۸۶).

روش‌های ترکیبیاتی سومین حوزه‌ای هستند که تفاوت‌های منطقه‌ای در شیوه‌های ریاضی را نشان می‌دهند. اولین نشانه‌ها در نیمهٔ دوم قرن ۲ هجری با تلاش‌های خلیل بن احمد (د ۱۷۵ق) برای فهرست کردن تمام ریشه‌های کلمات عربی، که به عنوان ترکیباتی از ۲۸ حرف الفبای عربی بدون تغییر ترتیب یا تکرار حروف نمایان می‌شود، به وجود آمد. پس از چندین تلاش بعدی برای شمارش تمام ریشه‌ها، این مسئله دوباره در مراکش، در پایان قرن ۶ هجری، در زمینه‌ای فرهنگی که از مطالعات زبان عربی حمایت می‌کرد، مطرح شد. ابن منعم (جبار ۱۹۸۵، ۱۸-۴۸؛ جبار ۲۰۱۳، ۸۲-۱۰۷) راه‌حل کامل را عرضه کرد. او راه را برای تأسیس حوزهٔ جدیدی از ریاضیات با تعاریف خاص خود، نتایج پایه‌ای (با استفاده از روش‌های وام‌گرفته از نظریهٔ اعداد) و دامنهٔ کاربرد خاص خود هموار کرد. در واقع، این تنها حوزه‌ای است که می‌توانیم شاهد تداوم در آثار ترکیبیاتی از ریاضی‌دانان باشیم که منجر به نتایج و کاربردهای جدید شده است (جبار ۱۹۸۱، ۴۱-۵۴).

در نتیجه، در نیمهٔ دوم قرن هفتم هجری، ابن بنّا مطالعه‌ای بر بخش ترکیبیات در کتاب علم حساب ابن منعم انجام داد و به حل مسئلهٔ جدیدی پرداخت. او عبارت ریاضی برای ترکیب‌های ممکن p شیء انتخاب‌شده از n شیء را یافت و دستوری عرضه کرد که به جای استفاده از «مثلث دوجمله‌ای» (ابن‌بنّا ۱۹۸۸، ۱۵۳-۱۶۴) نتیجه را مستقیماً نشان می‌دهد. سپس، در اثر دیگری به بررسی چندین مسئله پرداخت که نیازمند راه‌حل‌های ترکیبیاتی بودند (جبار ۲۰۰۳، ۳۹-۴۲). در نهایت، از قرن هشتم هجری، مفسران تلخیص اعمال الحساب ابن بنّا به بررسی این موضوع ادامه

۱. ش=شئ، م=مال، ک= کعب

دادند و از ابزارهای آن، به‌ویژه برای شمارش تعداد زیـادی از کسـرهایی کـه بایـد مطالعـه مـی‌شـد، استفاده کردند (مثلاً بنگرید به نسخهٔ الجزیره، کتابخانهٔ ملی، ش ۲۷۱۲، برگ‌های ۷۲ر–۷۳ر).

پس از دوره‌ای طولانی که در آن دو دستاورد یادشدهٔ اخیر از مرزهای مغـرب فراتـر نرفتنـد، ایـن ابزارها و نتایج از قرن هشتم هجری به تدریج در قاهره و سپس در استانبول رایج شدند. ابـن مجـدی (۷۶۷-۸۵۰ق) در کتابش حاوی اللّباب بخشی از این نمادها را معرفی کرد. در همان اثر، او به یک کاربرد ترکیبیاتی که در مغرب حل شده بود، پرداخت و تعمیم تازه‌ای از آن عرضه کرد. سپس مسـئلهٔ جدیدی دربارهٔ شمارش معادلات از درجهٔ n را مطرح و راه‌حلی برای آن بیان کرد (جبار ۱۹۸۱، ۹۷-۹۸، ۱۰۷-۱۱۲).

باز هم در غرب اسلام، دو توسعهٔ ویژه در حوزهٔ ریاضیات کاربردی مشـاهده می‌شـود. نخسـتین مورد، که هم محلی و هم «فرهنگی» است، به مسئله‌ای حقـوقی مربـوط می‌شـود. ایـن مسـئله بـه بررسی انواع آسیب‌هایی می‌پردازد که یک فرد ممکن است متحمل شود و نرخ‌هـای جبـران و میـزان غرامتی را که باید به قربانی پرداخت شود تعیین می‌کند. مدارس حقوقی سنتی قضاوت در مورد ایـن مسائل را به اختیار قضات گذاشته بودند تا بـه صـورت مـوردی تصـمیم‌گیری کننـد. تـا جـایی کـه می‌دانیم، مکتب اباضیه که در مغرب مرکزی، افریقیه (تونس امروزی) و عمان باقی مانده بـود، تنهـا مکتبی بود که عناصر مختلف این مسائل را به‌دقت تعیین کرد. این امر باعث شـد کـه علمـای ایـن مکتب کتب راهنمایی بنویسند که شامل تمام عناصر حقوقی و ریاضی مورد نیاز برای حـل مسـائلی از این نوع باشد که ممکن است به قاضی عرضه شود. به عنوان مثال، می‌توان به اسـماعیل جیتـالی، فقیه قرن‌های هفتم و هشتم هجری که مدتی را در جزیرهٔ جربا گذرانده و در آنجا دفـن شـده اسـت، اشاره کرد. در کتاب او در مورد علم ارث، فصلی به انواع آسیب‌ها اختصاص یافته است که با فصول دیگری از مسائل کاملاً ریاضی همراه است تا به وکلا آموزش دهـد کـه چگونـه مسـائل مربـوط بـه تجارت و اندازه‌گیری را حل کنند (جبار ۲۰۱۸).

حوزهٔ دومی که در آن توسعه‌های ویژه‌ای مشاهده می‌شود، هندسهٔ عملی است کـه از قـرن سـوم هجری به بعد الهام‌بخش نویسندگان متعددی بوده است. تولیدات غنی که به ما رسیده، ویژگی‌هـای منحصر به فردی را از نظر مفـاهیم مـورد بررسـی، روش‌هـای اسـتفاده شـده و اصـطلاحات نشـان می‌دهد. آثار تولید شده در اندلس، که در سال‌های اخیر مطالعه شده‌اند، نمونـه‌های خـوبی از ایـن ویژگی‌ها هستند. این آثار شامل مطالعهٔ اشکال سه‌بعدی است که در متون مسـلمانان شـرق وجـود ندارد، مانند الفنیق (کیسهٔ شن)، حوت الطعام (جسمی به شکل ماهی که قبورُی هم نامیده می‌شد) و العرمّـة الطعـام (کپـه‌ای از دانـه‌ها؛ جبـار ۲۰۰۷، ۱۱۳-۱۴۷). در ایـن متـون فصـل‌هایی کـاملاً اختصاصی برای تقسیم اشکال دوبعدی هـم وجـود دارد. ایـن موضـوع از دوران پـیش از اسـلام در

میراث ریاضی موجود است (موین ۲۰۱۷، ۷۹-۱۰۲) و همچنین در فعالیت‌های وکلای مسلمان که باید سهم هر فرد را از ارث معین کنند، مشاهده می‌شود. اما تا جایی که می‌دانیم، تنها نویسندگان اندلسی بودند که فصول جداگانه‌ای به این موضوع اختصاص داده‌اند (جبار ۲۰۱۶).

فهرست منابع

منابع اولیه

Abū Kāmil. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2012. *Abū Kāmil, algèbre et analyse diophantienne*. Berlin: De Gruyter. al-Ḫwārizmī. Folkerts, M., with Kunitzsch, P. 1997. *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach* al-Ḫwārizmī. München: Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

al-Khwārazmī. ed., tr. and ann. Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī, le commencement de l'algèbre*. Paris: Blanchard.

Ibn al-Akfānī. eds. Fakhūrī, M., Kamāl, M. and Al-Ṣaddīq, H. 1998. *Irshād al-qāṣid il*ā *asn*ā *al-maqāṣid* [A Guide for One Who Aims for the Highest Goals]. Beirut: Maktabat Lubnān nāshirūn.

Ibn al-Bannāʾ. ed., tr. and ann. Aballagh, M. 1988. *Raf' al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā'* [*The Raising of the Veil* of Ibn al-Bannā']. Thèse de Doctorat. Paris: University of Paris 1.

Ibn al-Bannāʾ. ed. and tr. Souissi, M. 1969. *Talkhīṣ aʿmāl al-ḥisāb* [Epitome of the Operations of Arithmetic]. Tunis: University of Tunis.

Ibn al-Khiḍr. tr. Rebstock, U. 2001. *Al-Tadhkira bi-uṣūl al-ḥisāb wa-l-farā'id* [Book of Reminders on the Foundations of Arithmetic and Inheritance]. Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Science. With facsimile.

Ibn al-Maghribī. ed. ʿAbd al-Tawwāb, A. 1992. *Lawḥ al-ḍabṭ fī 'ilm ḥisāb al-Qibṭ* [The Adjustment Board for the Coptic Science of Arithmetic]. *Revue de l'Institut des Manuscrits Arabes* 36: 119—37.

Ibn Munʿim. ed. Lamrabet, D. 2005. *Fiqh al-ḥisāb* [The Science of Arithmetic]. Rabat: Dār al-amān.

Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī. tr. Carathéodory, A. 1891. *Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin el-Toussy, d'après un manuscrit tiré de la bibliothèque de S.A. Edhem Pacha*. Constantinople: Typographie et lithographie Osmanié.

al-Samaw'al. eds. Ahmad, S. and Rashed, R. 1979. *Al-Kitāb al-bāhir fī l-jabr* [The Brilliant Book about Algebra]. Damascus: University of Damascus.

al-Uqlīdisī. ed. Saidan, A. S. 1985. *Kitāb al-fuṣul fī l-ḥisāb al-hindī* [Book of Sections on Indian Arithmetic]. Aleppo: I.H.A.S.

Ibn al-Yāsamīn. ed. and com. Zemouli, T. 1993. *Al-Aʿmāl al-riyāḍiyya li-Ibn al-Yāsamīn* [The Mathematical Works of Ibn al-Yasamin]. MA Thesis. Algiers: Ecole Normale Supeérieure.

نسخه‌های خطی

MS Algiers, BN, 2712.

MS Istanbul, Süleymaniye Library, Carullah 1509.

منابع ثانویه

Busard, H. L. L. 1968. "L'algèbre au moyen âge : Le "Liber Mensurationum" d'Abû Bakr," *Journal des savants*, April-June, 65-124.

Debarnot, M.-Th. 1997. "Trigonométrie," in Rashed and Morelon, eds., 2: 163-98.

Djebbar, A. 1981. *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIlle-XIVe siècles*. Paris: Publications Mathematiques d'Orsay, no. 81-02.

Djebbar, A. 1985. *L'analyse combinatoire au Maghreb: l'exemple d'Ibn Mun'im (XIle-XIIIe siecles)*. Paris: Publications Mathematiques d'Orsay, no. 85-01.

Djebbar, A. 1992. "Le traitement des fractions dans la tradition mathematique arabe du Maghreb," in Benoit, P., Chemla, K. and Mazard, G., eds. *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Berlin: Birkhauser, 223—40.

Djebbar, A. 2000. "Figurate Numbers in the Mathematical Tradition of Andalus and the Maghrib," *Suhayl*, vol. 1.

Djebbar, A. 2002. "La circulation des mathematiques entre l'Orient et l'Occident musulmans: interrogations anciennes et elements nouveaux," in Dold-Samplonius *et al*., 213-36.

Djebbar, A. 2003. "Mathematiques et societe a travers un ecrit maghrebin du XlVe siecle," in Cassinet, J., ed. *De la Chine a l'Occitanie, chemins entre arithmetique et algebre*. Actes du colioque international. Toulouse: Editions du C.I.H.S.O., 29-54.

Djebbar, A. 2004. "La phase arabe de l'histoire de la trigonometrie," in Hebert, E., ed. *Les instruments scientifiques dans le patrimoine: quelles mathematiques?* Paris: Ellipse, 415-35.

Djebbar, A. 2007. "La geometrie du mesurage et du decoupage dans les mathematiques d'Al-Anda- lus (Xe-XIIIe s.)," in Radelet de Grave, P., ed. *Liber Amicorum Jean Dhombres*. Turnhout: Brepols, 113-47.

Djebbar, A. 2013. "Islamic Combinatoric," in Wilson, R. and Watkins, J.-J., eds. *Combinatorics, Ancient and Modern*. Oxford: Oxford University Press, 83-108.

Djebbar, A. 2016. "Les techniques de decoupage dans un ouvrage geometrique d'al-Andalus," in Bouzari, A., ed. *Actes du XIe Colloque maghrebin sur l'Histoire des mathematiques arabes*. Algiers: Dar al-Khalduniyya, 109-38.

Djebbar, A. 2018. "Mathematiques et Droit musulman: Indemnisation des blessures et autres problemes de la tradition juridique ibadite," in Laabid, E., ed. *Actes du 12e Colloque Maghrebin sur l'Histoire des Mathematiques Arabes*. Marrakech: Ecole Normale Superieure, 88-108.

Djebbar, A. and Guergour, Y. 2013. "La numeration rum! dans des ecrits mathematiques d'al-Andalus et du Maghreb," *Suhayl* 12: 7-52.

Hogendijk, J. P. 1991. “The Geometrical Parts of the *Istikmal* of Yusuf al-Mu’taman ibn Hud (11th century). An Analytical Table of Contents,” *Archives Internationales d’Histoire des Sciences* 41: 207-81.

Hogendijk, J. P. 1996. “Which Version of Menelaus’ *Spherics* Was Used by al-Mu’taman ibn Hud in His Istikmal?” in Folkerts, M., 17-44.

Hoyrup, J. 2015. “Another Case of Stumbling Progress in the History of Algebra,” *Physis*, New Series 1.1-2: 1-38.

Khairetdinova, N. G. 1966. “Trigonometriceskij traktat isfahanskogo anonima,” *Istoriko- matematiceskie issle- dovaniya* 17: 449-64.

Laabid, E. 1990. *Arithmetique et algebre d’heritage selon l’Islam, deux exemples: Traite d’al-Hububi (Xe-XIe s.) et pratique actuelle au Maroc*. Memoire de Maitrise, Montreal: Universite du Quebec.

Lamrabet, D. 1981. *La mathematique maghrebine au moyen-dge*. Memoire de Post-graduation. Bruxelles: Universite Libre de Bruxelles.

Moyon, M. 2017. *La geometrie de la mesure dans les traductions arabo-latines medievales*. Turnhout: Brepols.

Proust, Ch. n.d. “Tablettes mathematiques cuneiformes: un choix de textes traduits et commentes,” http://culturemath.ens.fr/materiaux/sexa/source-book/index-sourcebook.htm. (Accessed 20 November 2019).

Sa^{c}idan, A. S. 1971. *Ta’rikh ilm. al-hisab al-^{c}arabi*. Amman: Jam^{c}iyyat $^{(}$ummal al-matabi^{c} al-ta^{c}awuniyya.

Sayili, A. 1985. *Logical necessities in mixed equations by Abd al-Hamid Ibn Turk and the algebra of his time*. Ankara: Turk Tarih Kurumu Basimevi.

Sesiano, J. 1989. “Koptisches Zahlensystem und (griechisch-)koptische Multiplikationstafeln nach einem arabischen Bericht” *Centaurus* 32: 53—65.

Sezgin, F. 1974. *Geschichte des arabischen Schrifttums*. Vol. V: Mathematik. Leiden and Boston: Brill.

Thureau-Dangin, F. 1938. *Textes mathematiques babyloniens*. Leiden and Boston: Brill.

Villuendas, M. V. 1979. *La trigonometria europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Mudd, el-Kitab mayhulat* (sic). Barcelona: Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.