

ابوریحان بیرونی و نظریهٔ اوج خورشید

نمونه‌ای از اصالت در علوم دوران اسلامی^۱

ویلی هارتنر و ماتیا س شرام
ترجمهٔ امیرمحمد گمینی

علم دوران اسلامی از همان آغاز کاملاً پذیرنده بود و از الگوهای پیشین مشتق شده بود، و بنابراین به معنی دقیق کلمه آن را نمی‌توان اصیل دانست. همچنین از همان مراحل بسیار ابتدایی، تمایلی بسیار به جذب کامل فعالیت‌های علمی و عقلی یونان در آن دیده می‌شد. بارها و بارها گفته‌اند که با توجه به انگیزه‌هایی که در این پدیده درکار بود، اهداف عملی غالب بود. ولی برای کسانی که ترجیح می‌دهند به جای خواندن نوشته‌های دیگران دربارهٔ این موضوع، خودشان نسخ خطی را مطالعه کنند، آشکار است که در اوایل دوران عباسی و شاید حتی از اواخر دورهٔ اموی، مشوق و انگیزهٔ اصلی اشتیاقی خالص برای دانش و کسب معرفت حقیقی بود. در واقع، این اشتیاق، و حالتی که هیچ‌گاه دانشمندان اسلام را از طلب دانش خسته نکرد، ویژگی اساسی دوران اسلامی قرون میانه است.

از میان خیل نمونه‌های مرتبط با این موضوع، خود را به نقل ترجمه‌هایی از اسحاق بن حنین (ح ۲۳۶ق) و اعضای مختلف خانواده‌اش محدود می‌کنیم. با اطمینان می‌توان گفت آن آثار فقط از روی علائق کاربردی [انتخاب و] ترجمه نشده‌اند؛ بلکه درست برعکس، در میان مجموعهٔ آثار [ترجمه‌شده از] جالینوس، نوشته‌های کاملاً نظری و منطقی، و همچنین آثار ارسطو و افلاطون، اقلیدس، ارشمیدس، منلائوس، و دیگران نیز یافت می‌شود [که همه‌شان جنبهٔ نظری دارند و ترجمه شدند]. با پایان قرن چهارم هجری، یعنی حدود ۱۰۰۰ میلادی، بی‌اغراق می‌توان گفت هیچ اثر علمی مهمی در یونان باستان نمانده بود که به عربی ترجمه نشده باشد. نوشته‌های هندیان نیز با استقبال مشابهی روبرو شده بود. هر چند تأثیر نوشته‌های هندی را در گسترش تفکر علمی [در تمدن

1. W. Hartner, M. Schramm, "Al-Biruni and the Theory of Solar Apogee: an Example of Originality in Arabic Science", in A.C. Crombie (ed.), *Scientific Change, Symposium on the History of Science*, Oxford 9-15 July 1961, pp. 206-218.

۲. پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران، amirgamini@ut.ac.ir

اسلامی] باید کمتر از متون یونانی دانست، اما آنها هم بیش از همه در ریاضیات مؤثر بودند؛ البته تأثیر آثار نجومی و احکام نجوم [هندی] را هم نباید دست کم گرفت. در واقع، در طول تاریخ هیچ فعالیتی قابل مقایسه با فعالیت مترجمان دوران اولیه [اسلامی] نیست.

به جای این که مهم‌ترین دستاوردهای [این دوران] را برشماریم (که بسیار طولانی می‌شود)، ترجیح دادیم یک مسئله مشخص را تحلیل کنیم: مسئله‌ای که به عقیده ما بهتر از هر چیز دیگر، تسلط کامل و دقت بسیار زیاد یکی از بزرگترین پژوهش‌گران دوره اسلامی - و به راستی یکی از شخصیت‌های بزرگ در تمام تاریخ علم - را نمایش می‌دهد؛ آن هم در مواجهه با موضوعی که اهمیتش از پیچیدگی و دشواری‌اش کمتر نبوده است. این مسئله را می‌توان از جمله دستاوردهای به‌راستی اصیل دانست، واژه اصیل را در اینجا باید به معنای «غیرتقلیدی» و «نو در شخصیت و سبک» گرفت، ولی مطمئناً نه به معنای «مشتق نشده یا مستقل»؛ زیرا که بی‌شک هر دستاوردی حتماً مشتق شده از، و در نتیجه، وابسته به کارهای نسل‌های پیشین است.

همان‌طور که همه می‌دانند، ابرخُس^۱ نخستین کسی بود که تفاوت طول چهار فصل سال را با طرح الگویی که در آن زمین دیگر مرکز مدار خورشید نبود، تبیین کرد.^۲ نخستین بار او بود که مفهوم حرکت دایره‌ای یکنواخت را به دور نقطه‌ای خارج از مرکز زمین مطرح کرد، چنان که خود به خود به نقاط حدی اوج و حضیض در دو طرف قطر برسد. این قطر از مرکز حرکت و همچنین مرکز زمین می‌گذرد و این دو نقطه را به هم متصل می‌کند. او بدون بهره‌گیری از روش مثلثاتی پیشرفته‌ای نتیجه گرفت که اوج [مدار خورشید] در نقطه $۵/۵$ درجه برج جوزا [= $۶۵/۵$ درجه] است و مرکز حرکت در حدود دو و نیم شصت شعاع [مدار خورشید] از زمین فاصله دارد. روش و نتایج او در مجسطی بطلمیوس (مقاله چهارم، فصل سوم) به طور کامل بحث شده است. بطلمیوس ادعا کرد داده‌های ابرخُس را دوباره رصد و بررسی کرده و فهمیده که نتایج خودش با نتایج سلفِ تحسین‌شده‌اش در ۳۰۰ سال پیش، یکی است.

از همان ابتدای دوره اسلامی توجه ویژه‌ای به این قسمت از نظریه [حرکت] خورشید شد. اگر بخواهیم نشان دهیم خطا در این رصدها تا به چه حساسیتی به ابطال نتایج منجر می‌شود، کافی است به این واقعیت اشاره کنیم که هر چقدر رصد گذر خورشید از نقاط اعتدالین بهاری و پاییزی [که برای تعیین مقادیر بالا لازم است] نسبتاً ساده است، اما بسیار دشوار است که بتوان لحظات گذر خورشید از نقاط انقلابین تابستانی و زمستانی را با اطمینان رصد کرد. دلیلش واضح است: از قرار معلوم، سرعت تغییر میل خورشید در اعتدالین و نزدیکی آن به بیشترین مقدار (حدود ۲۴ دقیقه در روز) و در

1. Hipparchus

۲. از ذکر نام آپولونیوس در این زمینه خودداری می‌کنیم، چون اطلاعات کافی از او در دست نداریم.

انقلابین به کمترین مقدار خود (حدود ۱۲ دقیقه در روز) می‌رسد.^۱ رصد مستقیم کمیت دوم نشدنی است، حتی با تلسکوپ، و فقط رصدگری باتجربه و ماهر می‌تواند نتایج خوبی به دست آورد. بر اساس آنچه بیرونی در تحقیقات تاریخی خود در باب‌های هفتم و هشتم از مقاله ششم کتاب قانون مسعودی آورده است، نخستین رصدها در رُبع شمساییه بغداد، یا شاید نزدیک دروازه‌ای به همین نام، در سال ۱۹۹ یزدگردی (۲۱۷ق) انجام شد. او توضیح می‌دهد که این اطلاعات را از شرح ابوجعفر خازن بر مجسطی گرفته است. جالب است که منجمان نخستین آن قدر مستقل بودند که روش به‌کارگرفته و تشریح شده بطلمیوس را کنار بگذارند، و روش خود را جایگزین آن کنند (حداقل ما نمی‌دانیم از چه منبعی ممکن است آن را گرفته باشند). روش آنها بسیار برتر از روش یونانی بود. آنها به جای رصد گذر خورشید از چهار نقطه اصلی سالانه، گذر خورشید را از نقاط ۱۵ درجه ثور، ۱۵ درجه اسد، ۱۵ درجه عقرب، و ۱۵ درجه دلو اندازه می‌گرفتند. این اصلاح کوچک ولی سرنوشت‌ساز، توانا نشان ساخت بدون نیاز به بهبود روش محاسبه، اندازه‌گیری‌های قابل‌اعتمادتری انجام دهند. بدیهی است فایده این روش جدید با اختلاف زیادی بر زیانش می‌چربد، اما با وجود بهبود روش‌شناختی، در عمل به نتایج کاملاً اشتباه منجر شد، زیرا مقداری که برای طول نقطه اوج حاصل شد حدود ۲۰ درجه کمتر [از مقدار قبلی] بود.

تنها یک سال بعد، ثابت بن قره یا بنو موسی، یا هر دوی آنها، دو فصل را دوباره رصد کردند، و به نتیجه بسیار بهتری رسیدند: $۸۲\frac{۳}{۴}$ درجه (بر اساس کتاب فی سنة الشمس بالارصاد).^۲ این مقدار با تقریب خوبی به تأثیر حاصل از تقدیم اعتدالین نزدیک است (و مقدار نادرست ابرخس را رد می‌کند، که بطلمیوس به خطا تأییدش کرده بود. ولی این مقدار تغییر حدود هزار سال را برابر با حدود ۱۵ درجه نشان می‌داد، چون مقدار جدید ثابت بن قره برابر با یک درجه در ۶۶ سال بود). بنابراین ثابت بن قره به اصلی متوسل شد که امروزه به نام تیغ اوکام مشهور است، و نتیجه گرفت که این دو مقدار حتماً باید با هم مساوی باشند.^۳

این پدیده تا دو بیست سال بعد بارها رصد شد، و هر دو روش بطلمیوس و روش جدید «چهار

۱. در آخرین ۱۲ ساعت قبل و اولین ۱۲ ساعت بعد از انقلابین، مقدار تغییرات کمتر از ۳۵ ثانیه است.

۲. نسخه موجود در دیوان هند (لندن)، شماره ۷۳۴، برگ ۶.

۳. تیغ اوکام اصلی روش‌شناختی است که ویلیام اوکامی (William of Occam) در قرن چهاردهم میلادی در فلسفه به کار برد و بسیاری از مفروضات غیرلازم فلسفه ارسطویی را کنار گذاشت. معمولاً از آن به اصل سادگی هم تعبیر می‌کنند. طبق این اصل، تا جایی که می‌توان باید پیش‌فرض‌های غیرلازم را دور ریخت و از اصول کمتری برای تبیین و تحلیل پدیده‌ها استفاده کرد. قرن‌ها پیش از اوکام و ثابت بن قره، بطلمیوس در کتاب مجسطی از میان دو مدل که هر دو حرکات خورشید را به خوبی تبیین می‌کردند، مدل خارج‌مرکز را به دلیل «سادگی» انتخاب کرد. قطب‌الدین شیرازی نیز صراحتاً از «حذف مالا‌یحتاج» در علم هیئت سخن می‌گفت (نک. Gamini & Sadrforati (2022). "The principle of simplicity for Qutb al-Din Shirazi." *Studies in History and Philosophy of Science*, 91: pp. 60-65). ظاهراً منظور نویسندگان مقاله حاضر آن است که چون مقدار حرکت نقطه اوج خورشید با مقدار حرکت تقدیمی نزدیک بود، ثابت بن قره نتیجه گرفت لابد این دو یکی هستند و عاملی مشترک آنها را ایجاد می‌کند. م

فصل» به کار رفتند. فهرست زیر علاقه شدید منجمان اسلامی را به این موضوع نشان می‌دهد:
 سال ۲۰۱ یزدگردی (۲۱۹ق)، ثابت بن قره یا بنوموسی یا هر دو، در بغداد (روش بطلمیوس)
 سال ۲۱۲ یزدگردی (۲۳۰ق)، خالد مروروزی، علی بن عیسی حرّانی، و سند بن علی، در
 بغداد (روش بطلمیوس)

سال ۲۵۱ یزدگردی (۲۶۹ق)، بتّانی، در رقه (روش بطلمیوس)
 سال ۲۵۷ یزدگردی (۲۷۵ق)، سلیمان بن عصمت سمرقندی، در بلخ (روش بطلمیوس)
 سال ۳۴۳ یزدگردی (۳۶۴ق)، ابوالوفا [بوزجانی]، در بغداد (روش بطلمیوس)
 سال ۳۴۵ یزدگردی (۳۶۶ق)، ابوالوفا [بوزجانی]، در بغداد (روش چهار فصل)
 سال ۳۵۵ یزدگردی (۳۷۶ق)، ابوحامد صاغانی، در بغداد (روش چهار فصل)

این رصدها و مجموعه رصدهای دیگری که ابوریحان بیرونی در جرجان (غرب خوارزم) در
 سال ۳۸۵ یزدگردی (۴۰۷ق) با دقتی بسیار بیشتر انجام داد، مواد اولیه اثر عالمانه او را فراهم کرد.
 او بحث خود را با نقل گزارش بطلمیوس از مسیری که پیموده آغاز می‌کند. طبق معمول، روش کار
 [بطلمیوس] را به صورت نه‌چندان تاریخی عرضه می‌کند؛ یعنی به جای وترها مقادیر سینوس‌ها را
 می‌آورد، درباره تغییرات حاصل از تابع زمان و تأثیر حاصل از معرفی مقدار اصلاح‌شده حرکت
 میانگین خورشید (که از تعیین سال اعتدالی یافته خودش) بحث می‌کند؛ به منظور جلوگیری از
 خطاهای گریزناپذیر، مقدار حرکت میانگین خورشید را به صورت دوره میان دو عبور متوالی
 خورشید از نقطه اعتدال پاییزی تعریف می‌کند؛ چنان که در ادامه رساله به‌وضوح دیده می‌شود، او
 به‌خوبی آگاه بود که انتخاب دلخواهی نقطه شروع، مستلزم تعیین دقیق دوره زمانی مورد نظر
 نیست. پس از پرداختن به هر آنچه از شیوه بطلمیوس ارزش دانستن دارد، به همان شکل به سراغ
 بحث و تحلیل نتایج پیشینیانش در دوران اسلامی می‌رود.

بیرونی سپس نتایج رصدهای خود را معرفی و ارزیابی می‌کند و اوج خورشید را در موقعیت ۸۴
 درجه و ۵۹ دقیقه و ۵۱ ثانیه و ۹ ثلثه به دست می‌آورد؛ و خواننده را با بسط و کاربرد روش جدید
 خود غافل‌گیر می‌کند، روشی که شامل سه متغیر اصلی متفاوت است و نشان می‌داد همه این سه
 متغیر به نتیجه عددی یکسانی می‌رسند. بیرونی مبنای کارش را بر قضیه‌ای می‌گذارد که اولین بار
 ارشمیدس آن را در رساله‌ای مخصوص مطرح و بحث کرده است. رساله‌ای که از نظر روش‌شناختی
 جالب است، زیرا حاوی بیست اثبات مختلف برای آن قضیه است. آن قضیه به‌طور خلاصه چنین
 می‌گوید: اگر خط شکسته‌ای که دو ضلع آن مساوی نیستند در یک کمان مستدیر محاط شده باشد،
 و خطی از نقطه میانه کمان بر (قسمت بزرگ‌تر) خط شکسته عمود شود، آنگاه خط عمود، خط
 شکسته را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند. لازم به ذکر است که بیرونی نه تنها به جنبه‌های

محض ریاضیاتی (روش شناختی) این موضوع علاقه‌مند بود، بلکه کاربرد قضیه‌های جدید در مسائل کاربردی را نیز مد نظر داشت. بدون شک، پیشینیان او مفاهیم و روش‌های [ریاضی] جدیدی، چون تانژانت، کتانژانت، و همچنین قضیه سینوس کروی را به نجوم افزوده بودند، ولی بررسی ساختاری معیارهایی که بر اساس آنها یک روش بر روش دیگر ترجیح داده شود، اولین بار در آثار بیرونی ظاهر شد.

بیرونی از تمام مبانی تحقیق خود نتیجه می‌گیرد که بدون شک اوج خورشید دارای حرکتی دائمی در جهت افزایش طول است. ولی در این مرحله از تحلیل، صراحتاً اظهار نظر نمی‌کند که آیا این حرکت منظم است یا نامنظم.

در ادامه ترجمه‌ای تحت اللفظی می‌آوریم از بخشی که بیرونی در آن، فهم مقدماتی بطلمیوس (فصل اول مقاله سوم مجسطی) از طول سال خورشیدی را گزارش و تحلیل می‌کند، تا خط سیر بحث را از این نقطه پی بگیریم:^۱

وقتی ابرخس حرکت اوج [خورشید] را بررسی می‌کرد، مشابه همان طریق که ما بررسی کردیم، متوجه شد که ادوار [خورشید] در فلک البروج، که سال‌های خورشیدی را می‌سازند، برابر نیستند^۲ و حرکت میانگین، هنگامی که در فلک اوج باشد، ادوار یکنواخت دارد. آنگاه تلاش کرد آن [حرکت میانگین]^۳ را به خاطر بی‌هنجاری‌های سال‌ها، بدون مراجعه به آنها بیابد. و ظاهراً فهمید که حرکت متداول اوجات برابر با حرکت فلک ثوابت است. سپس با ارجاع به مقارنات خورشید با ثوابت و بازگشت آن به هر کدام از آنها، به سراغ یافتن ادوار یکنواخت رفت. بطلمیوس، با این فرض که هدف ابرخس یافتن طول سال خورشیدی بوده است، تلاش کرد نشان دهد که اگر سال خورشیدی بر اساس بازگشت خورشید به ستارگان ثابت تعریف شود [یعنی مثلاً به یک ستاره خاص]، هرکسی غیر از ابرخس هم حتماً می‌تواند آن [سال] را بر اساس بازگشت به یک سیاره تعریف کند. اگر چنین باشد آنگاه سال‌های خورشیدی [مختلفی] [یعنی تعاریف مختلف بسیاری برای سال خورشیدی] پیدا می‌شود. پاسخ او [یعنی بطلمیوس] این است که ماهیت سال [خورشیدی] واضح‌تر از آن است که از گیاهان و حیوانات پنهان بماند چه برسد انسان؛ یعنی اینکه این مدت از چهار فصل تشکیل شده، به طوری که خورشید به موقعیت خود در فلک البروج بازگردد. در پاسخ، به جای ابرخس باید گفت: «اولاً و پیش از هر چیز

۱. بیرونی، القانون المسعودی، چاپ حیدرآباد، ۱۹۵۴-۱۹۶۱، ج ۲، ص ۶۶۲-۶۶۳.

۲. افزوده‌های مترجم فارسی داخل دو قلاب می‌آید.

۳. علامت نفی در نسخه ۱۶۱۳ کتابخانه دولتی پروس (Preussische Staatsbibliothek) از نسخه حروفچینی به اشتباه حذف شده است.

۴. افزوده‌های داخل یک قلاب از مولفان مقاله است - م.

سال را به خاطر اینکه حدودش بر اساس وضعش نسبت به ماه [تعریف] شده است کنار می‌گذاریم. سپس بدان که من به دنبال یافتن آن نبودم زیرا مقدار ثابتی ندارد تا مسیر خورشید میانگین و ادوار یکنواختش را - که حرکت فلک اوج از آن ناشی می‌شود، نه از فلک البروج - به دست دهد. من رصدی در دست ندارم که بتواند حرکت اوج را از منظر موقعیتش در آنها [یعنی برج‌های دایرة البروج] به دست دهد. بنابراین به عقیده تو درباره حرکت اوجات سیارات، تمایل یافتم، یعنی اینکه با حرکت ستارگان ثابت برابر باشد، هر چند ممکن است درباره اوج خورشید با من مخالف باشی. در این زمینه به هیچ وجه با تو موافق نیستم زیرا شکی درباره حرکت آن ندارم. و چون آن حرکت شامل همه اوج‌ها می‌شود، به عقیده من چرخش خورشید در فلک اوج برابر با بازگشتش به یک ستاره ثابت است. ولی آن [[دوره زمانی خاص]] را سال نمی‌نامم، تا مرا سرزنش نکنی و به تناقض گویی متهم نسازی. اگر می‌توانستم دور حرکت یکنواخت آن را با استفاده از بازگشتش به سیارات پیدا کنم، دیگر چرا تعلق کنم.^۱

بیرونی در بحث درباره مقدار تغییرات سال ناشی از حرکت اوج، ابتدا به قضیه‌ای می‌پردازد که نشان می‌دهد تعدیل حرکت خورشید هنگامی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که وقتی از مرکز عالم دیده شود، خورشید در زوایای قائمه از خط الاوجین^۲ باشد. دو قضیه بعدی به رابطه‌ای می‌پردازد که حرکت ظاهری (از دید مرکز عالم) را به تعدیل نظیر آن متصل می‌کند. در نتیجه اگر خورشید از دو کمان، که از نگاه ناظر برابر به نظر می‌رسند، گذر کند، در کمانی که فاصله‌اش از اوج بیشتر است سریع‌تر خواهد بود.

این قضیه‌ها برای اثبات ابتدای طول سال بر انتخاب نقطه شروع [حرکت خورشید] کافی خواهند بود. ولی بیرونی به جای این که خود را با چنین بیان کلی‌ای راضی کند، این مسئله را نقطه آغاز پژوهشی کامل درباره شرایط حرکت شناختی چرخش مستدیر یکنواخت [خورشید] از نقطه خارج مرکز در نظر می‌گیرد. او پس از بحثی شایسته، در نهایت اثبات می‌کند که اوج و حضیض نقاطی هستند که سرعت ظاهری در آنها به بیشینه و کمینه خود می‌رسد و با گذر از یکی به دیگری، کاهش و افزایش مداوم سرعت دیده خواهد شد. تا جایی که می‌دانیم، این نخستین بار است که مفهوم حرکت شتابدار موضوع تحلیل ریاضی قرار گرفته و این امر برای اینکه بیرونی را از بزرگ‌ترین نوابغ ریاضی بشماریم کافی است.^۳

۱. ترجمه بر اساس متن عربی و ترجمه انگلیسی انجام شد. م

۲. apsidal line، خط الاوجین خطی است که نقاط اوج و حضیض را به هم وصل می‌کند و از مرکز عالم و مرکز فلک حامل می‌گذرد. م
 ۳. بر خلاف آنچه شاید در نگاه اول به نظر برسد، تعیین نقاط توقف سیارات توسط بطلمیوس بر اساس کارهای «آپولونیوس و دیگر ریاضیدانان» (مجسطی، مقاله ۱۲، فصل اول؛ مقایسه کنید با مقاله نوگه‌باور درباره نظریه سیاره‌ای آپولونیوس در Communications

پژوهش‌های او تا ۶۰۰ سال بعد که حساب بی‌نهایت‌ها کشف می‌شود بی‌همتا است. به همین دلیل ترجمه تحت‌اللفظی بند ویژه‌ای ویژه از قانون مسعودی^۱ را می‌آوریم:

در این صورت، واضح است که کندی در دو طرف اوج، و بیشینه کندی در آن روی می‌دهد. آنگاه [کندی] کم می‌شود و به سمت تندی می‌رود، که بیشینه آن در حضيض است. آنگاه [تندی] کم می‌شود و در دو طرف آن به سوی کندی می‌رود، زیرا کند شدن و سرعت گرفتن^۲ بر حسب کم و زیاد شدن تفاضل تعدیلات روی می‌دهد.^۳

به این ترتیب، پدیده حرکت شتابدار که تاکنون تنها به وسیله ملاحظات هندسی اثبات و ملاحظه شده بود، اکنون می‌تواند به مصاف ملاحظات دقیق ریاضی برود. برای اختصار و وضوح، با اصطلاحات نوین می‌توان روش بیرونی را به شکل زیر خلاصه کرد.

حرکت ظاهری [خورشید] σ متشکل از حرکت متوسط $M = \omega t$ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و مؤلفه اضافه $\chi(t)$ یعنی «تعدیل» وابسته به زمان t است. به بیان دیگر این مؤلفه اضافه را می‌توان به حرکت میانگین افزود یا از آن کاست: $\sigma = \omega t \pm \chi(t)$. در ایجاد تفاضل‌های $\Delta_1\sigma, \Delta_2\sigma, \dots$ برای بازه‌های زمانی دلخواه $\Delta_1t = \Delta_2t = \dots$ ، صرفاً باید $\Delta_1\chi, \Delta_2\chi, \dots$ را در نظر بگیریم. آنگاه با اثبات هندسی می‌توان نشان داد که تفاضل‌های بعدی $(\Delta_2\chi)$ در عبور از اوج به حضيض (که تعدیل را باید از آن کاست) همیشه منفی هستند، و از روی تقارن، در نیمه دیگر فلک حامل مقادیر مثبتند.

اثباتش چنین است: هر تعدیل [مفروض] χ مطابق با مثالی است با دو ضلع ثابت، یعنی شعاع حامل و فاصله مرکز حامل از ناظر؛ در حالی که طول ضلع سوم (فاصله خورشید تا ناظر) متغیر است. این مثلث‌ها را می‌توان (با چرخاندن به دور مرکز حرکت به اندازه $\omega t - 180^\circ$) چنان مرتب کرد که اضلاع به صورت بردار شعاعی باشند، و گوشه‌هایی هم که تعدیلات را نشان می‌دهند، بر هم منطبق شوند. آنگاه گوشه‌های آزاد هم روی دایره‌ای به مرکز فلک حامل قرار می‌گیرند، که شعاعش

۱. ج ۲، ص ۶۶۶.
 ۲. retardation and acceleration
 ۳. وإذا كان الامر على هذا، استبان أن البطو عن جنبتي الأوج وأنه غاية البطو عنده. ثم يتناقص ويذهب نحو السرعة وأن غايتها عند الحضيض. ثم يتناقص ويذهب نحو البطو عن جنبتيه، لأن التباطؤ والإسراع يكونان بحسب تزايد التفاضل في التعدیلات وتناقصه.

مساوی فاصله ناظر از مرکز فلک حامل است؛ و اگر $\Delta_1 t = \Delta_2 t = \Delta_3 t = \dots$ ، کمان‌های بین دو گوشه مجاور با هم برابر و مطابق با زاویه $\omega \Delta t$ خواهند بود. قضیه هشتم از مقاله سوم اصول اقلیدس نیز نشان می‌دهد در حالتی که تعدیلات از حرکت متوسط کم می‌شوند، $\Delta_2 \chi < \Delta_1 \chi < \Delta_0 \chi$ ، و در حالت برعکس $\Delta_2 \chi > \Delta_1 \chi > \Delta_0 \chi$ برقرار است.

برای آن که مهارت تمام عیار بیرونی در برخورد با این مفاهیم کاملاً جدید روشن شود، به نتیجه‌گیری او در انتهای اثباتش مراجعه می‌کنیم: در گذر از کمترین به بیشترین سرعت، حرکت جسم متحرک باید با سرعت متوسط، ωt ، در یک نقطه مشخص یعنی آن نقطه‌ای که در آن تعدیل به بیشینه می‌رسد همزمان باشد؛ زیرا در آن نقطه (و فقط آنجا) مقدار $\Delta \chi$ صفر می‌شود و رابطه $\sigma = \omega t$ برقرار خواهد شد.

چنان که بیرونی پیش‌تر مدعی شده بود، این ملاحظات حرکت‌شناختی نشان می‌دهند که مقادیر مختلف طول سال اعتدالی لزوماً با نقطه انتخاب شده برای مبدأ اندازه‌گیری در دایره البروج متناسبند. برای سادگی بیشتر چنین فرض کردند که دو اندازه‌گیری مختلف یکی با شروع از نقطه اوج، و دیگری از نقطه حضیض به طور همزمان انجام شده است. سال بعد، طول‌های اوج و حضیض اندکی افزایش می‌یابند. بنابراین، تا زمانی که خورشید دوباره به اوج یا حضیض برسد، از نقطه مبدأش نسبت به دایره البروج به اندازه مقدار مشخص δ گذشته است، که ظاهراً در هر دو حالت، برابر با نقطه‌ای است که ناظر به طور خارج از مرکز برای حرکت خورشید در نظر گرفته، ولی در نسبت با اوج هم‌مرکز است. ولی با در نظر گرفتن این واقعیت که نزدیک حضیض خورشید تندتر از نزدیک اوج از زاویه δ می‌گذرد، مقدار طول سال اعتدالی در حالت اول در مقایسه با حالت دوم بیشتر خواهد شد.

بیرونی نشان می‌دهد یکی از نتایج اثباتش این است که برای حصول مقداری قابل اعتماد برای سال اعتدالی، تنها دو نقطه از دایره البروج را می‌توان به عنوان مبدأ در نظر گرفت: یعنی دو جا نزدیک نقاطی که تعدیل بیشینه می‌شود (به عبارت دیگر، نقاط تقاطع دایره البروج با خط عمود بر خط الاوجین گذرنده از زمین)، زیرا تنها آنجاهاست که زاویه δ با سرعت متوسط ω طی می‌شود.

اینجا به نکته‌ای درباره تاریخ یکی از مهم‌ترین و پرثمرترین مفاهیم در ریاضیات، یعنی مفهوم توابع ریاضی اشاره می‌کنیم. ریشه و نحوه توسعه مفهوم تابع همواره با نوعی سوگیری نامطلوب همراه بوده است: یعنی آن را به طور انحصاری حاصل تحلیل دکارتی در نظر گرفته‌اند، به طوری که (ما معتقدیم به غلط) ادعا شده از دستاوردهای متاخر مفهوم مدرسی «پهنای صورت»^۱ است. ولی تکامل

1. latitudines formarum

این مفهوم در طول دو قرن اخیر به وضوح نشان می‌دهد که چنین تفسیری بسیار کوتاه‌بینانه است. پیش از اولین تلاش‌ها برای صورت‌بندی مفهوم عمومی توابع، استفاده از آنها در روش‌های به‌کاررفته در محاسبات نجومی، به درجات عالی رسیده بود. در واقع می‌دانیم بطلمیوس از همان زمان، در ایجاد توافق میان روش‌های هندسه یونانی با مبحث روابط تابعی، موفقیت‌هایی کسب کرده بود.

اثبات‌های بیرونی، چنان که در بخش بعدی باب ۷ قانون مسعودی دیده می‌شود، الگویی برای تحقیق درباره روابط تابعی است. بیرونی در مسئله تأثیر حرکت اوج بر طول چهار فصل، درباره ویژگی‌های موقعیت‌های مختلف نقطه اوج بحث می‌کند، و آنگاه شرایطی را توصیف می‌کند که طول یک فصل به بیشینه یا کمینه می‌رسد. همچنین بررسی می‌کند که در کدام یک از مقاطع، طول فصول افزایش یا کاهش می‌یابد. بیرونی در گام بعدی به سراغ بحث مشابهی درباره جمع دو فصل پشت‌سرهم می‌رود.

بیرونی در بخش قبل (یعنی باب ۶، «درباره حرکت متوسط خورشید بر اساس روش بطلمیوس»)، تلاش کرده بود با انتخاب یک نقطه مشخص از دایره البروج به عنوان نقطه شروع حرکت و آنگاه با مقایسه قدیمی‌ترین رصدها با رصدهای خودش، به نتیجه قابل قبولی برسد. بدیهی است که مدت زمان طولانی [بین این دو مجموعه رصد] در کاهش خطاهای محتمل بسیار موثر بود. بنابراین، بیرونی دریافت حتی وقتی رصدها با مهارت و دقت بسیار همراه باشند و ابزارهای غول‌پیکری که به توصیف او در اختیار پیشینیانش بوده به کار روند، خطاهای بسیار بزرگی در رصد انقلابین روی می‌دهد. از همین طریق است که خبردار می‌شویم ابوسهل کوهی در سال ۳۷۸ق برای رصد در بغداد اتاق مخصوصی را به کار می‌گرفت که کف آن به صورت کاسه‌ای کروی با قطر ۱۵ ذراع، و مرکزش منطبق بر یک روزن در سقف ساختمان بود. شش سال بعد، ابومحمود خجندی در ری سُدسی را با شعاع ۴۰ ذراع به کار برد. بنابر توصیف بیرونی، حتی آن زمان هم، نتایج بسیار متفاوت بود. ولی به عقیده بیرونی، حتی خطاهای رصد اعتدالین نباید دست کم گرفته شوند. عرض جغرافیایی موقعیت رصد، همیشه با دقت کافی معلوم نیست. مثلاً مقادیر عرض جغرافیایی بغداد، چنان که دو نفر از پیشینیان بلافصل او، یعنی ابوحامد صاغانی و ابوالوفا [بوزجانی] اندازه‌گیری کرده بودند، به اندازه $1\frac{1}{p}$ تفاوت دارد (بیرونی در اینجا موقعیت دقیق مکان‌های رصد در بغداد را ذکر می‌کند؛ بی‌شک با توجه به فاصله واقعی آن‌ها این مقدار اختلاف ناچیز بود). او در نهایت نشان می‌دهد که عواقب چنین خطاهای کوچکی می‌تواند قابل توجه باشد و به طور خاص اختلافی در حد فقط چند دقیقه روز (۱ روز = ۶۰ دقیقه روز) ممکن است به اختلافی در حد یک یا چندین درجه در اندازه‌گیری طول دایره البروجی موقعیت اوج منجر شود.

بیرونی پس از بحثی کوتاه در مورد دیدگاه نیریزی درباره حرکت اوج، که آن را با اظهارنظرهای

نیش دار رد می‌کند، چنین ادامه می‌دهد: شکی نیست که مقدار آن بسیار به تقدیم اعتدالین نزدیک است. ولی به خاطر شرایط غیردقیق [گزارش] رصدهای در دسترسش نمی‌تواند به طور قطعی درباره مقدار دقیق آن اظهار نظر کند: «در حقیقت، ما به خاطر اینکه جز همین رصدهای مذکور چیز دیگری در دست نداریم، از امکان یافتن مقدار آن حرکت به این طریق ناامید شده‌ایم.»
این چنین است که برای بیرونی فقط یک امکان به عنوان فرضیه باقی ماند که در آن زمان نه قابل اثبات و نه قابل رد بود: اینکه حرکت اوج با تقدیم اعتدالین برابر باشد. اگر به یاد بیاوریم که ثابت بن قره این برابری را بر اساس یک اصل غایت‌شناسانه کاملاً صوری مفروض گرفته بود، تفاوت رویکرد [بیرونی] به روشنی معلوم می‌شود.

آنچه در ادامه می‌آید هم بسیار جالب توجه است. تعیین تقریبی [این مقدار] بیرونی را راضی نمی‌کند، و حالا تلاش می‌کند دقیق‌ترین مقدار ممکن را برای حرکت اعتدالین بیابد. مهارت فوق العاده‌اش به او اجازه می‌دهد فراتر از مقدار تقریبی ۱ درجه در ۱۰۰ سال که بطلمیوس یافته بود برود. لازم به ذکر است که بیرونی ترجیح می‌داد به جای استفاده از رصدهای بطلمیوس رصدهای قدیمی‌تر تیموخاریس^۱ را به کار بگیرد. به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که بیرونی از نواقص رصدهای بطلمیوس به خوبی آگاه بود. بیرونی مقدار خود را [برای حرکت اعتدالین] از مقایسه رصدهای ستاره سماک اعزل توسط خودش و رصد تیموخاریس به دست می‌آورد، آنگاه این مقدار را در مقایسه با رصدهای ستاره رجل الجبار توسط ابرخس و منجمان اسلامی^۲ پیشین محک می‌زند.
از مقایسه نسخه حروفچینی قانون مسعودی با نسخه‌ای محفوظ در کتابخانه دولتی پروس^۲ (MS orient. 1613)، می‌توان فهم بهتری از شیوه کار بیرونی پیدا کرد. به این ترتیب که دو دسته مقدار مستقل به دست می‌آوریم، زیرا بیرونی با دو دسته داده اساساً متفاوت کار می‌کند: یک دسته مبتنی بر رصد سماک اعزل توسط تیموخاریس از طریق گزارش بطلمیوس، یعنی طول ۲۰' ۲۲° سنبله؛ و دیگری ۳۳" ۴۳' ۵۵" ۲۰°. دلیل این ناهمخوانی وقتی معلوم می‌شود که بدانیم مقدار اول بازسازی شده است، زیرا آنچه تیموخاریس در سال ۲۹۴ ق م رصد کرده اختفای سماک اعزل با ماه بوده است. از قرار معلوم، بیرونی محاسبات خود را با طول دایره البروجی محاسبه شده توسط بطلمیوس آغاز کرده، ولی بعد آن را با مقدار حاصل از نظریه قمری خودش جایگزین کرده است.
بیرونی درباره مقدار دوم، در مقدمه فهرست ستارگان ثابت (قانون مسعودی، مقاله نهم، باب ۳، فصل ۳) می‌گوید اختلاف منظر و تفاوت طول اسکندریه و مکان رصدهایش در غزنه را به حساب آورده است. ما در رصدهای او در سال ۳۹۹ ق، برای هر دو دسته مقادیر، ناهمخوانی مشابهی

1. Timocharis (320-260 BC)
2. Preussische Staatsbibliothek

می‌یابیم: در اولی آنرا $۹۰^{\circ} ۲۴'$ میزان به دست می‌آورد و در دومی، $۹۰^{\circ} ۳۰'$ بی‌شک این هم به خاطر اصلاحات بعدی است، که دلایش به هر حال نامعلوم است.

بر اساس این ملاحظات بیرونی مقداری برای تقدیم اعتدالین می‌یابد که با مقدار بطلمیوس تفاوت چشمگیر دارد: مقادیر طول به اندازه یک درجه در ۶۸ سال و ۱۱ ماه افزایش می‌یابد (مقدار امروزی تقریباً ۷۱ سال و $۷\frac{۱}{۴}$ ماه است). سپس بیرونی بر اساس فرضیه‌اش مقدار حرکت روزانه اوج را از حرکت روزانه خورشید، که از مقدار خودش برای طول سال اعتدالی به دست آورده بود، کم می‌کند. آنگاه برای حرکت متوسط روزانه خورشید به مقداری می‌رسد که باید آن را موجه و معتبر دانست.

با توجه به این که تمام محاسبات او بر اساس مقدار مشروط حرکت متوسط حاصل از طول نادقیق سال اعتدالی به دست آمده بود، بیرونی دوباره موقعیت اوج و مقدار خروج از مرکز را با مقدار اصلاح شده محاسبه می‌کند. نیاز به تکرار نیست که او بازم در این کار روش‌های جدیدی را به کار می‌گیرد که به طور خاص برای این هدف طراحی کرده بود. مخصوصاً باید توجه کرد که او اندک‌اندک به سوی تعمیم روش خود پیش می‌رود که فقط برای یک ربع از دایره البروج کاربرد داشت؛ و در نهایت برای محاسبه مقادیر مطلوب از سه رصد دلخواه و پی‌درپی به روشی همان قدر عالی دست می‌یابد. در یک اصلاح نهایی، بیرونی (باب ۹) به این نتیجه می‌رسد که کم کردن حرکت روزانه اوج از حرکت روزانه خورشید در دایره البروج (اگر سختگیرانه بگوییم) غیرقابل قبول است، زیرا آنها به دور مراکز متفاوتی می‌گردند. مدل جدید بیرونی برای حرکت خورشید، موقعیت آن را در کره اوج برای همان دو نقطه اعتدال پاییزی به دست می‌آورد که در ابتدا به عنوان نقاط مبدأ برای تعیین سال اعتدالی به کار بسته بود و آنگاه از همان دو موقعیت حرکت روزانه متوسط را در کره اوج به دست می‌آورد.

فرصت مناسب برای بررسی تمام این پژوهش لحظه‌ای است که خورشید در حال عبور از اعتدال بهاری، دارای اختلاف (ناهنجاری) متوسط ۹۰ درجه («حرکت متوسط ۹۰ درجه در فلک اوج») باشد. بیرونی پیشتر در باب ۸ نشان داده بود که چگونه این لحظه را می‌توان محاسبه کرد (بر اساس نجوم جدید این حالت در سال ۱۲۵۰ م فرامی‌رسید). فارغ از روش‌های جدیدی که برای یافتن پارامترهای ضروری ذکر می‌شوند، بیرونی پیشنهاد می‌کند بیشترین زاویه ارتفاع خورشید را در حال صعود در روزهای متوالی در حدود زمان احتمالی عبور آن از اوج رصد کنیم، و موقعیت دومی را کماکان از افزایش و کاهش بازه‌های متناظر طول تعیین کنیم.

تحقیقات بیرونی که در بالا اشاره شد بیش از همه سیر وقایع آینده را پیش چشم می‌آورد. آیا مرکز فلک اوج واقعاً بر محیط دایره‌ای به مرکز عالم می‌چرخد؟ بیرونی از این فرضیه استفاده می‌کند اما می‌گوید این فرضیه «فقط تا وقتی معتبر است که چیز دیگری آن قدر آشکار نشود که مجبور به پذیرش آن شویم، چه در زمان حیات ما باشد، چه عصری دیگر، که دیگرانی به جای ما زندگی خواهند کرد».