انگیزهٔ بیرونی در ابداع روش درون‌یابی مرتبهٔ دوم[۱]

ای. اس. کندی[۲]

ترجمه و تلخیص: مهسا راقب[۳]

۱. مقدمه

ابوریحان بیرونی در سدهٔ پنجم هجری در آسیای مرکزی متولد شد. در زمان او، عمل درون‌یابی خطی روش متداول کار با جدول‌های عددی بود. او در کتاب قانون مسعودی[۴]، علاوه بر دستور خطی، یک روش درون‌یابی با استفاده از تفاضل‌های مرتبهٔ دوم عرضه می‌کند. این مورد توسط کارل شوی[۵] ذکر شد، اما برای اولین بار توسط بوریس روزنفلد[۶] به تفصیل شرح داده شد. وی مشاهده کرد که اگرچه تابع درون‌یابی حاصل‌شده سهموی است، اما بهتر از دستور خطی نیست.

هدف یادداشت حاضر طرح این حدس است که دستور ابوریحان بیرونی تلاشی برای تعمیم درون‌یابی خطی بوده است. خوانندگانی که مایل به اطلاعات کلی‌تری در مورد زندگی و آثار او هستند، می توانند به عنوان مثال، به مقالهٔ مربوط به بیرونی در زندگینامهٔ علمی دانشمندان (*DSB*)[۷] رجوع کنند.

در بخش های ۲ و ۴ زیر، جدول‌های سینوس و تانژانت در قانون مسعودی را شرح می‌دهیم. سپس در بخش‌های ۳ و ۵، ترجمهٔ عبارات ذکر شده در قانون مسعودی که در آنها دستور بیرونی آمده‌است بیان می‌شود.

برای اولین تفاضل از نماد متعارف زیر استفاده می‌کنیم:

---

۱. این مقاله ترجمه‌ای است از:
"The Motivation of al-Bīrūnī's Second Order Interpolation Scheme", *Proceedings of the First International Symposium History of Arabic Science*, Aleppo, 1978.

۲. E. S. Kennedy استاد پیشین دانشگاه آمریکایی بیروت، برای اطلاع بیشتر از زندگی و آثار علمی او بنگرید به: مجلهٔ تاریخ علم (پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران)، «یادی از ادوارد استوارت کندی»، شمارهٔ ۸، ۱۳۸۸، ص ۱۱۳-۱۲۲.

۳. پژوهشگر آزاد، mahsaragheb@gmail.com

۴. چاپ حیدرآباد (هند)، ۳ جلد، ۱۹۵۴-۱۹۵۶.

5. Carl Schoy

6. Boris A. Rosenfeld

۷. ترجمهٔ فارسی در: زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی، ج ۱، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، چاپ چهارم، ۱۳۸۹، ص ۳۰۵-۳۲۷.

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m$$

و برای nامین تفاضل داریم

$$\Delta^n x_m = \Delta^{n-1} x_{m+1} - \Delta^{n-1} x_m$$

در اینجا مدخل‌های جدول‌ها زوج‌های (x_m, y_m) هستند چنان‌که $m = ...-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ و x و y به ترتیب معرف متغیرهای مستقل و وابسته هستند.

تفاضل مقادیر جدول، Δx، را با d نشان می‌دهیم.

۲. جدول سینوس‌ها در *قانون مسعودی*[1]

جدول در چهار ستون مرتب شده است که دامنهٔ متغیر مستقل $x_n = 0;15°, 0;30°, 0;45°, 1;0°, ..., 90°$ است. برای هر x_n، ستون دوم حاوی $\sin x_n$ محاسبه شده تا چهار رقم شصت‌گانی است. عنوان ستون سوم «تعادیل» و شامل مقادیر $4\Delta \sin x_n$ است. ستون آخر «فضول» (تفاضل‌ها) نام دارد و شامل مقادیر $\Delta \sin x_n$ است. توجه کنید که در اینجا $d = 0;15° = \frac{1}{4}°$.

۳. درون‌یابی مرتبهٔ دوم برای سینوس‌ها

بیرونی پس از تشریح درون‌یابی خطی برای این جدول، در صفحهٔ ۳۲۷ بخش کوتاهی با عنوان «دقیق کردن مقدار سینوس» دارد که در زیر ترجمه شده‌است و از پرانتز برای تعیین سطرهای متن یا درج مطالب توضیحی استفاده می شود. اما در ابتدا دستور خطی را برای رجوع بعدی عرضه می‌کنیم

$$y = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{d}\right)\Delta y_0 \qquad (1)$$

«(۶) فرض کنیم مقدار سینوس (y_0) در مقابل مقدار نزدیک‌تر (کمتر) x_0 در ستون متغیر مستقل است، (۷) آن را حفظ می‌کنیم و تفاضل مربوط به آن (Δy_0) را در ستون تفاضل‌ها اختیار می‌کنیم (۸) و همچنین به مقدار تفاضل Δy_{-1} در ردیف بالای آن (سابق) توجه می‌کنیم. سپس تفاضل بین این دو (۹) تفاضل را ($\Delta y_{-1} - \Delta y_0 = -(\Delta y_0 - \Delta y_{-1}) = -\Delta^2 y_{-1}$ ، که برای سینوس مثبت است) در آنچه از کمان ($x - x_0$) باقی می‌ماند، و سپس در چهار دقیقه ($\frac{1}{d}$) ضرب

۱. ج ۱، ص ۳۰۸-۳۲۵

می‌کنیم. (۱۰) حاصل را از مقدار قبلی می‌کاهیم و باقی‌مانده را در کمان $(x - x_\circ)$ و سپس در چهار دقیقه ضرب می‌کنیم (۱۱). نتیجه را به مقدار سینوسی که حفظ کردیم اضافه می‌کنیم. نتیجه، سینوس دقیق کمان مطلوب خواهد بود (۱۲).»

این دستور با نمادهای جدید چنین بیان می‌شود:

$$y = y_\circ + \left(\frac{x - x_\circ}{d}\right)\left[\Delta y_{-1} + \left(\frac{x - x_\circ}{d}\right)\Delta^2 y_{-1}\right] \quad (2)$$

۴. جدول تانژانت‌ها در *قانون مسعودی*(ج ۱، ص ۳۴۱-۳۴۵)

این جدول هم دارای چهار ستون اعداد است. در اینجا دامنهٔ $x_n = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, ..., 90^\circ$ ج که در آن $d = 1^\circ$. ستون دوم شامل $y_n = \tan x_n$ تا چهار رقم شصت‌گانی است. ستون سوم به نام «فضول» (تفاضل‌ها) شامل مقادیر Δy_n یعنی اولین تفاضل است. ستون چهارم با عنوان «تعادیل» است و در واقع مقدار $\Delta^2 y_{n-1}$ یا تفاضل دوم به سمت عقب است.

۵. درون‌یابی مرتبهٔ دوم در جدول تانژانت‌ها

در صفحهٔ ۳۳۸ بخشی به نام «دقیق کردن کتانژانت» وجود دارد. کلمهٔ ظل (سایه) که هم برای تانژانت و هم برای کتانژانت به کار می‌رود، در اینجا به معنی تابع کتانژانت است، زیرا متغیر مستقل، متمم کمان مفروض اختیار شده است.

«(۱۵) مقدار کتانژانت را برای درجات صحیح ($y_\circ$) کمان باقی مانده از ۹۰°، (۱۶) مانند بالا حفظ می‌کنیم. سپس آنچه را که در برابر تعدیل ($\Delta^2 y_{-1}$) است، می‌گیریم، و تفاضل قبل از (Δy_{-1}) یعنی تفاضل به ازای متغیر مستقل $x_\circ$ (۱۷) را هم می‌گیریم. سپس مقدار باقیمانده از کمان $(x - x_\circ)$ را در تعدیل ضرب و نتیجه (۱۸) را به تفاضل قبلی اضافه می‌کنیم. سپس حاصل را در باقی‌ماندهٔ کمان نیز ضرب می‌کنیم و حاصلضرب (۱۹) را به کتانژانت مورد نظر می‌افزاییم.»

بیان نمادین، به صورت زیر است:

$$y = y_\circ + (x - x_\circ)\left[\Delta y_{-1} + (x - x_\circ)\Delta^2 y_{-1}\right] \quad (3)$$

تنها تفاوت بین آن و (۲) این است که اکنون $d = 1$ که مربوط به جدول کتانژانت است. در بخش‌های دیگر قانون مسعودی نیز به همین روش اشاره شده‌است. اما این دو بخش باید برای نشان دادن روشن و منسجم بودن دستورات نویسنده و خوانش درست متن کافی باشد.

۶. انگیزهٔ بیرونی در دستور درون‌یابی

اگر روش بیرونی (۲) با دستور درون‌یابی خطی (۱) مقایسه شود، می‌بینیم که Δy_0 در (۱) با عبارت داخل کروشه در (۲) جایگزین شده‌است. دومی به نوبهٔ خود همان شکل (۱) را دارد، با این تفاوت که مرتبهٔ تفاضل‌ها یک واحد افزایش یافته و زیرنویس ۰ با ۱- جایگزین شده‌است. از این رو به نظر می‌رسد که بیرونی، با دانستن کارایی تفاضل‌های مرتبهٔ اول، احساس کرد که از تفاضل‌های مرتبهٔ دوم هم باید بتوان استفاده کرد. او آنها را همانند اولین تفاضل‌ها در درون‌یابی خطی عرضه کرد.