رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه

منسوب به ارشمیدس

محمدمهدی کاوه یزدی[۱]

مقدمه

ارشمیدس (۲۸۷ ق.م- ۲۱۲ ق.م) که از جملهٔ بزرگ‌ترین ریاضیدانان باستان است، علاوه بر اختراع ابزارها و وسایل مکانیکی و کشف قوانین فیزیک، در ریاضیات و به‌ویژه هندسه آثار زیادی داشته است که متأسفانه تعداد کمی از آنها باقیمانده است. یکی از کارهای مهم ارشمیدس در ریاضیات به دست آوردن مقدار تقریبی عدد پی، یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن، بود. وی برای محاسبهٔ آن روشی به نام روش افنا عرضه و ثابت کرد که عدد پی محصور بین دو عدد $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{10}{71}$ است. گذشته از آن روش‌های مختلفی برای تعیین جذر تقریبی اعداد ابداع کرد که از مطالعهٔ آنها معلوم می‌شود که وی قبل از ریاضیدانان هندی با کسرهای مسلسل آشنایی داشته است.

در حساب، کتاب ریگشماری را نوشت و در آن روش غیرعلمی یونانیان را که برای نمایش اعداد از علائم متفاوت استفاده می‌کردند، کنار گذاشت و دستگاه شمارشی اختراع کرد که به کمک آن ممکن بود هر عدد بزرگی را نوشت و خواند.

یکی از دستاوردهای اولیهٔ ارشمیدس گسترش فرمول‌هایی برای یافتن مساحت و حجم کره و استوانه بود. وی برای تعیین مساحت اشکال هندسی غیرمنظم آنها را به مثلث‌ها یا مستطیل‌هایی کوچک تقسیم کرد و پس از محاسبهٔ مساحت هر یک از آنها، مقادیر به‌دست‌آمده را با هم جمع کرد. او توانست سطح و حجم اجسامی مانند کره، استوانه و مخروط را حساب کند و روش نوینی برای اندازه‌گیری در دانش ریاضی پدید آورد. همچنین کتاب‌هایی دربارهٔ خصوصیات و روش‌های اندازه‌گیری مساحت اشکال و حجم اجسام هندسی از قبیل مخروط، منحنی حلزونی، سهمی و استوانه نوشت.

نوشته‌های ریاضی ارشمیدس، برخلاف اختراعاتش، تا مدت‌ها ناشناخته بودند و او را

---

۱. کارشناس ارشد تاریخ علم، mahkavyzd@yahoo.com

ریاضیدانی اهل اسکندریه در عهد باستان می‌دانستند. در قرن ششم میلادی ایزیدور تفسیرهایی بر کارهای ارشمیدس نوشت و اوتوکیوس برای اولین بار از آثار او استفاده کرد. با این که تا آن زمان آثار کمی از ارشمیدس ترجمه شده بود، ولی در قرون وسطی به‌منزلهٔ انفجار اطلاعات بود. ریاضیدانان دورهٔ اسلامی با ترجمهٔ کارهای ارشمیدس که بیشتر به زبان یونانی بودند، توانستند هم آثار او را از نابودی نجات دهند و هم غنای قابل‌توجهی به متون آن دوره ببخشند.

ارشمیدس تألیفات زیادی داشته که تعداد اندکی از آنها باقی مانده است. آثار ریاضی وی به این شرح است:

۱. کره و استوانه
۲. تکسیر دایره
۳. شبه مخروط‌ها و شبه کره‌ها
۴. مارپیچ‌ها
۵. تعادل صفحه‌ها
۶. تربیع سهمی
۷. جسم‌های شناور
۸. ریگشماری
۹. مفروضات

علاوه بر آثار فوق، آثار دیگری نیز به‌وسیلهٔ مؤلفان عرب به وی نسبت داده شده است که بیشتر به‌صورت نسخه‌های خطی به زبان عربی موجود هستند. این آثار عبارتند از:

۱. ساعت‌های آبی
۲. دایره‌های مماس بر هم
۳. خطوط موازی
۴. مثلث‌ها
۵. خواص مثلث قائم‌الزاویه
۶. داده‌ها
۷. تقسیم دایره به هفت جزء متساوی

کتاب خواص مثلث قائم‌الزاویه

کتاب خواص المثلّث القائم الزاویة منسوب به ارشمیدس است. در الفهرست و تاریخ الحکماء نام این رساله کتاب الخواص المثلثات القائمة الزوایا آمده است (الفهرست، ص ۴۸۰؛ تاریخ الحکماء قفطی، ص ۹۲). این رساله توسط ریاضیدانان دورهٔ اسلامی به عربی ترجمه شده است. مترجم آن مشخص نیست، ولی حدس زده می‌شود که ثابت بن قره (۲۱۱– ۲۸۸ق) باشد.[1] متن اصلی این رساله که به زبان یونانی بوده به جا نمانده، ولی ترجمهٔ عربی این بخش پایانی آن، که

۱. ثابت بن قره رساله‌های زیادی از ریاضیدانان یونانی و از جمله ارشمیدس به زبان عربی ترجمه کرده است. از جملهٔ این آثار رسالة في الدوائر المتماسة است که اصل یونانی آن موجود نیست و تنها نسخهٔ خطی آن در کتابخانهٔ بانکیپور (پاتنا، هند) موجود است و متن آن به همراه رسالة في اصول الهندسیة در سال ۱۹۴۷م توسط دائرةالمعارف عثمانیه (حیدرآباد دکن) چاپ شده است. چون بیان قضایا و اثبات آنها در کتاب خواص المثلّث القائم الزاویة لأرشمیدس تشابه زیادی با رسالة في الدوائر المتماسة دارد، شاید این اثر هم به دست ثابت بن قرّه ترجمه شده باشد.

تاکنون بررسی نشده است، در نسخۀ خطی منحصربه‌فردی در کتابخانۀ دانشکدۀ ادبیات دانشگاه تهران به شمارۀ ۲۸۴/۸ موجود است. این نسخۀ خطی ضمن مجموعه‌ای شامل ۸ رساله است که به نسخ ریز سدۀ ۷، ۸ و ۹ نوشته شده است و توسط آقای احمد جوادی، امام‌جمعۀ کرمان، به کتابخانۀ دانشگاه تهران اهدا شده و شمارۀ ثبت آن ۷۵۵۸۹ است (دانش‌پژوه، ۱۳۴۴، ص ۴۴).[۱] عناوین رساله‌های این مجموعه به این شرح است:

۱. زیادات عباس بن سعید في المقالة الخامسة من کتاب اقلیدس؛
۲. اغراض مقالات اقلیدس (خمسة اقسام)؛
۳. حد اقلیدس (تألیف النسبة في الاصول و تعریف قدر النسبة)؛
۴. حواشی علی تحریر اصول اقلیدس، به خط محمد ملقب به معین منجم کاشانی در اواخر ذی‌القعده ۸۴۲ق در سمرقند؛
۵. شرح صدر المقالة العاشرة من کتاب اقلیدس لأبی جعفر الخازنی؛
۶. شرح صدر المقالة العاشرة من کتاب اقلیدس لأبی الحسن الأهوازی؛
۷. مسئلة لثابت بن قرة، أذا خرج من دائرة ضلع المثلث و ضلع المسدس في جهة واحدة؛[۲]
۸. من کتاب خواص المثلث لأرشمیدس.

در کتاب الخواص المثلّث القائم الزاویة، که ترجمۀ فارسی آن در اینجا عرضه می‌شود، پنج قضیۀ هندسی در مورد مثلث قائم‌الزاویه به اثبات رسیده است. گرچه برای اثبات قضایا از مطالب اصول اقلیدس استفاده شده است، ولی شبیه این قضیه‌ها در اصول وجود ندارد و از این جهت دارای اهمیت فوق‌العاده است. صورت قضایایی که در این رساله آمده عبارت است از:

قضیۀ اول: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع محیط، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شود، مساوی با دو برابر حاصل ضرب وتر در مجموع محیط و عمود وارد بر وتر است.

قضیۀ دوم: در هر مثلث قائم‌الزاویۀ مختلف‌الاضلاع، مربّع محیط، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شود، و مربّع تفاضل دو ضلع زاویۀ قائمه مساوی با (مجموع) مربّع وتر و یکی از دو ضلع زاویۀ قائمه با مربّع وتر و ضلع دیگر زاویۀ قائمه است.

قضیۀ سوم: در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر از یک طرف وتر آن به اندازۀ یک ضلع زاویۀ قائمه و از طرف دیگر آن به اندازۀ ضلع دیگر زاویۀ قائمه جدا کنیم، آنگاه حاصل ضرب پاره‌خط بین دو نقطۀ

۱. کاتب این مجموعه معین‌الدین کاشانی، از نزدیکان جمشید کاشانی، است که نسخۀ ۳۱۸۰ کتابخانۀ ملی ملک شامل مفتاح الحساب و چند اثر دیگر جمشید کاشانی نیز به خط اوست. - میراث علمی
۲. ترجمۀ فارسی این رساله در شمارۀ اول میراث علمی اسلام و ایران (ص ۱۸۶-۲۰۱) چاپ شده است.

حاصل در محیط مثلث، هرگاه به صـورت خـط راسـتی در نظـر گرفتـه شـود، مسـاوی چهـار برابـر مساحت مثلث است.

قضیهٔ چهارم: در هر مثلث قائم‌الزاویه مربّع محیط، هرگاه به صورت یـک خـط راسـت در نظـر گرفته شود، مساوی با دو برابر مجموع حاصل ضرب محیط در وتـر آن و حاصـل ضـرب دو ضـلع زاویهٔ قائمه آن است.

قضیهٔ پنجم: در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر در امتداد یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمـهٔ آن و از دو سـر آن دو پاره‌خط مساوی با ضلع دیگر زاویهٔ قائمه جدا کنیم، آنگاه مربّع مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه و مربّع تفاضل آنها مساوی دو برابر مربّع وتر آن است.

در انتهای این رساله چهار قضیهٔ دیگر آمده، که در مورد روابط طولی در مثلـث در حالـت کلـی است و شاید مترجم مقاله یا کاتب، آنها را به مقاله افزوده باشد. صورت این قضایا چنین است:

قضیهٔ ششم (قضیهٔ اول پیوست): این قضیه در مورد نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث اسـت کـه در آن بیان می‌دارد که: «حاصل ضرب قطعاتی که نیمساز یک زاویهٔ مثلـث روی ضـلع مقابـل آن جـدا می‌کند و مربع طول نیمساز مساوی حاصل ضرب دو ضلع آن زاویه است».

در اثبات این قضیه از قضایای شانزدهم مقالـهٔ ششـم و سـوم و سـی و پـنجم مقالـهٔ دوم اصـول اقلیدس استفاده شده است. از طریق این قضیه و به کمک قضیهٔ سوم مقالـهٔ ششـم اصـول اقلیـدس می‌توان طول نیمساز هر زاویهٔ مثلث را بر حسب سه ضلع آن به دست آورد که در ادامهٔ شـرح قضـیه آورده شده است.

قضیهٔ هفتم (قضیهٔ دوم پیوست): این قضیه در مورد میانهٔ مثلث است که چنین بیـان مـی‌دارد: «مجموع نصف مربّع ضلعی که میانه بر آن وارد شده است و دو برابر طول میانه مساوی بـا مجمـوع مربّعات دو ضلع دیگر مثلث است».

از طریق این قضیه هم می‌توان طول میانهٔ وارد بر هر ضلع مثلث را بر حسب اندازه‌های سه ضلع آن به دست آورد که در ادامهٔ شرح قضیه آورده شده است.

قضیهٔ هشتم (قضیهٔ سوم پیوست): این قضیه اثباتی برای قضیهٔ دوم مقالهٔ ششم اصول اقلیدس است که اکنون به قضیهٔ تالس مشهور است. صورت این قضیه چنین است: «اگر خط راستی مـوازی با یکی از ضلع‌های مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسـبت قطـع می‌کنـد». اثبـاتی کـه در اینجا آمده با اثبات اقلیدس تفاوت دارد.

قضیهٔ نهم (قضیهٔ چهارم پیوست): این قضـیه اثبـاتی بـرای قضـیهٔ سـوم مقالـهٔ ششـم اصـول اقلیدس است که به قضیهٔ نیمسازها مشهور است. صورت این قضیه چنین است: «اگر خـط راسـتی یک زاویه از مثلثی را نصف کند و قاعدهٔ آن را نیز ببرد، نسبت قطعه‌های قاعده بـه یکـدیگر همچـون

دو ضلع مثلث است به یکدیگر». اثباتی که برای این قضیه آمده نیز با اثبات اقلیدس تفاوت دارد.

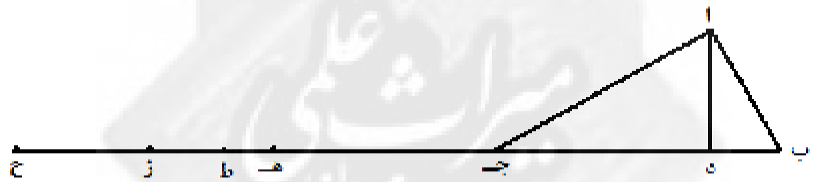
در ترجمهٔ رسالهٔ حاضر، افزوده‌های توضیحی درون کمانک و افزوده‌های تکمیلی درون قلاب آمده است.

ترجمهٔ رساله

از کتاب خواص مثلث [قائم‌الزاویه] تألیف ارشمیدس

[قضیهٔ اوّل]: [در] هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اضلاع سه‌گانهٔ (محیط) آن، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شوند، مساوی با دو برابر حاصل ضرب مجموع محیط و عمود وارد بر وتر در وتر آن است.

مثال: [مثلث] **ا ب جـ** [که] در آن زاویهٔ **ا** قائمه است، [را در نظر می‌گیریم]؛ می‌گوییم مربّع اضلاع سه‌گانهٔ (محیط) آن، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شوند، مساوی است با دو برابر حاصل ضرب [محیط] آن و عمود [وارد بر وتر]، که **ا د** است، در قاعدهٔ آن، که **جـ ب** است.



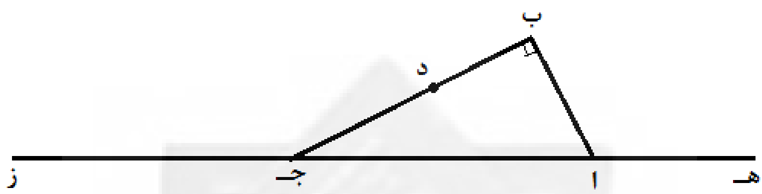
شکل ۳. ۲. ۱

[برهان]: **جـ ب** را امتداد می‌دهیم و [روی آن] **جـ هـ** را برابر **ا جـ** و **هـ ز** را برابر **اب** و **ز ح** را برابر **اد** و **جـ ط** را برابر **جـ ب** جدا می‌کنیم. **ط ب** در نقطهٔ **جـ** دو نیم شده است و **ط ز** را به آن اضافه می‌کنیم. پس حاصل ضرب **ب ز** در **ز ط** با مربّع **ط جـ** برابر مربّع **جـ ز** است. مربّع **ز جـ** برابر [مجموع] مربّعات **ز هـ** و **هـ جـ** و دو برابر حاصل ضرب **ز هـ** در **هـ جـ** است. [مجموع] مربّعات **ز هـ** و **هـ جـ** برابر با مربّع **ط جـ** است که مساوی با قاعده است. پس [مقادیر] متساوی را [از طرفین تساوی] حذف می‌کنیم. حاصل ضرب **ب ز** در **ز ط** مساوی با [دو برابر] حاصل ضرب **ز هـ** در **هـ جـ** باقی می‌ماند. حاصل ضرب **ح ز**، که مساوی با عمود [وارد بر وتر] است، در **ط ب**، که دو برابر قاعده است، مساوی با حاصل ضرب **ز ب**، یعنی مجموع اضلاع، در **ز ط** است. پس نسبت **ح ز** به **ز ب** برابر نسبت **ز ط** به **ط ب** است. اگر ترکیب [نسبت در صورت] شود، نسبت **ح ب** به **ز ب** برابر نسبت **ز ب** به **ط ب** می‌شود. **ز ب** واسطهٔ هندسی در تناسب است؛ پس حاصل ضرب **ح ب** در **ط ب** برابر مربّع **ز ب** است و این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

[قضیهٔ دوم]: [در] هر مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف‌الاضلاع، مربّع اضلاع سه‌گانهٔ آن، هرگاه به صورت

یک خط راست در نظر گرفته شوند، و مربّـع فزونـی یکـی از دو ضـلع زاویـۀ قائمـۀ آن بـر دیگـری، مساوی با [مجموع] مربّع وتر زاویۀ قائمه و یکی از دو ضلع [زاویۀ قائمه] با مربّع وتر و ضـلع دیگـر زاویۀ قائمه است، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شوند.

مثال: مثلث **ا ب جـ** [که] زاویۀ **ب** در آن قائمه است [را در نظـر می‌گیـریم] و [فـرض مـی‌کنیم] **ب جـ** بلندتر از **ا ب** باشد؛ می‌گویم مربّع اضلاع سه‌گانۀ (محیط) آن، با مربّع تفاضـل **ب جـ** و **ا ب** مساوی است با [مجموع] مربّع **ب جـ** و **جـ ا** هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شـوند، و مربّع **جـ ا** و **ا ب**، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شوند.



شکل ۳. ۲. ۲

[برهان]: **ا هـ** را برابر با **ا ب** و **جـ ز** را برابر با **ب جـ** جدا می‌کنیم. و [فرض مـی‌کنیم] **ب د** فزونـی **ب جـ** بر **ا ب** باشد. پس مربّع **هـ ز** برابر [مجموع] مربّعات **هـ ا**، **ا جـ** و **جـ ز** و دو برابر حاصل ضـرب **هـ ا** در **ا جـ** و دو برابر حاصل ضرب **ا جـ** در **جـ ز**[1] و دو برابر حاصل ضرب **هـ ا** در **جـ ز** اسـت. امـا دو برابر حاصل ضرب **هـ ا** در **زجـ**[2]، یعنی دو برابـر حاصـل ضـرب **ا ب** در **ب جـ**، مسـاوی بـا دو برابـر حاصل ضرب **ا ب** در **جـ د**[3]، که مساوی آن است، و دو برابر حاصـل ضـرب **جـ د** در **ب د** اسـت. دو برابر حاصل ضرب **ا ب** در **جـ د** برابر با [مجموع] مربعـات **ا ب** و **جـ د** اسـت. بـه دو برابـر حاصـل ضرب **ب د** در **د جـ**[4] مربّع **جـ د** و مربّع **ب د** را اضافه می‌کنیم که مساوی با مربّع **ب جـ** اسـت. پـس [دو برابر] حاصل ضرب **ا ب** در **ب جـ** با مربّع **ب د** برابر [مجموع] مربّعات **ا ب**، **ب جـ** یعنی مربّع **ا جـ** است. پس مربّع **هـ ز** و مربّع **ب د** مساوی با [مجموع] مربّعات **هـ ا**، **ا جـ** و یک بـار دیگـر مربّـع **ا جـ** و مربّع **جـ ز** و دو برابر حاصل ضرب **هـ ا** در **ا جـ** و دو برابـر [حاصـل ضـرب] **ا جـ** در **جـ ز** اسـت. ولی [مجمـوع] مربّعـات **هـ ا**، **ا جـ** و دو برابـر حاصـل ضـرب **هـ ا** در **ا جـ** برابـر مربّـع **هـ جـ** اسـت. و [مجموع] مربّعات **ا جـ** [و **جـ ز**] و دو برابـر حاصـل ضـرب **ا جـ** در **جـ ز** برابـر مربّـع **ا ز** اسـت. پـس [مجموع] مربّعات **هـ ز** و **ب د** برابـر [مجمـوع] مربّعـات **هـ جـ** و **ا ز** اسـت و ایـن چیـزی اسـت کـه

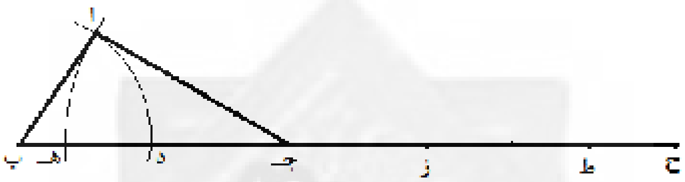
---

۱. نسخه: جـ ا
۲. نسخه: ا جـ
۳. نسخه: جـ هـ
۴. نسخه: +و.

می‌خواستیم تبیین کنیم.

[**قضیهٔ سوم**]: [در] هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر از یک طرف وتر آن بـه انـدازهٔ یکـی از اضـلاع زاویـهٔ قائمهٔ آن و از طرف دیگر آن به اندازهٔ ضلع دیگر زاویهٔ قائمهٔ آن جدا کنیم، آنگاه حاصل ضرب [پـاره] خطی که بین دو نقطه است در محیط مثلث، یعنی [مجموع] اضلاع مثلث، هرگاه بـه صـورت یـک خط راست در نظر گرفته شود، چهار برابر مساحت مثلث است.

مثال: مثلث **ا ب جـ** با زاویهٔ قائمهٔ **ا** [را در نظر می‌گیریم] و روی قاعدهٔ آن **ب د** را برابر بـا **ا ب** و نیز **جـ هـ** را برابر **ا جـ** جدا می‌کنیم؛ می‌گویم حاصل ضرب [مجموع] اضلاع [مثلث] در **هـ د** مسـاوی چهار برابر مساحت مثلث است.



شکل ۳. ۲. ۳

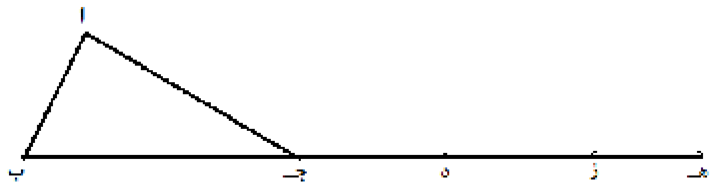
برهان: وقتی دو [پاره] خط **ب ا**، **ا جـ** را بر [پاره] خط **ب جـ** تصویر کنیم، تفاضل آنها [پاره] خط **هـ د**[1] است. و **ب جـ** را امتداد می‌دهیم و [روی آن] **جـ ز** را مثل **ب ا** و **ز ح** را مثل **ا جـ** و **ح ط** را مثـل **هـ د** جدا می‌کنیم. چون **ح ط** تفاضل بین [مجموع] دو [پاره] خط **ب ا** و **ا جـ** و **ب ح**[2] اسـت، **جـ ط** برابر با **ب جـ** باقی می‌ماند. پس خطّ **ب ط** در نقطهٔ **جـ** دو نـیم شـده اسـت. و **ط ح** را بـه آن اضـافه می‌کنیم. [پس] حاصل ضرب **ب ح** در **ط ح** با مربّع **جـ ط** برابر مربّع **جـ ح** است. ولـی مربّـع **جـ ح** برابر [مجموع] مربّعات **جـ ز** و **ز ح** است. و دو برابر حاصل ضرب **جـ ز** در **ز ح** و [مجموع] مربّعـات **جـ ز** و **ز ح** برابر مربّع **ب جـ** است. پس دو برابر حاصل ضـرب **ب ح** در **ح ط** بـا مربّـع **جـ ط**، [کـه] برابر با **ب جـ** [است] برابر با مربّع **ب جـ** و دو برابر حاصل ضرب **جـ ز** در **ز ح** اسـت. مربّـع مشـترک **ب جـ** را حذف می‌کنیم. حاصل ضرب **ب ح** در **ح ط** مساوی با دو برابر حاصل ضـرب **جـ ز** در **ز ح** باقی می‌ماند. ولی دو برابر حاصل ضرب **جـ ز** در **ز ح** مساوی چهـار برابـر مسـاحت مثلـث **ا ب جـ** است و این چیزی است که می‌خواستیم تبیین کنیم.

[**قضیهٔ چهارم**]: [در] هر مثلث قائم‌الزاویه، مربّع اضلاع سه‌گانهٔ (محیط) آن، هرگاه به صورت یـک خط راست در نظر گرفته شود، مساوی با دو برابر حاصل ضرب محیط (مثلث) در وتر آن و مسـاوی

۱. نسخه: **هـ ز**
۲. نسخه: **ب جـ**

دو برابر حاصل ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن است.[1]

مثال: مثلث **ب ا جـ** با زاویهٔ قائمهٔ **ا** [را در نظر می‌گیریم]، می‌گویم که مربّع محیط آن [هرگاه] به صورت یک خط راست [در نظر گرفته شود]، مساوی با دو برابر [مجموع] حاصل ضرب **ب جـ** در محیط آن و [دو برابر] حاصل ضرب **ب ا** در **ا جـ** است.



شکل ۳. ۲. ۴

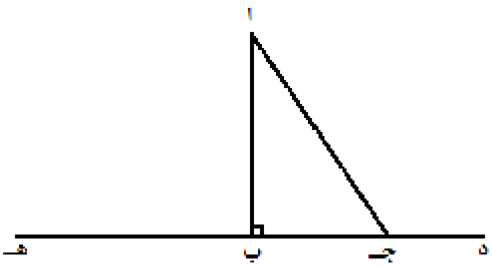
[برهان]: **جـ د** را برابر **ا ب** و **د هـ** را برابر **ا جـ** و **جـ ز**[2] را برابر **ب جـ** رسم می‌کنیم. پس **ب ز** در نقطهٔ **جـ** به دونیم شده است. و **ز هـ** به آن اضافه شده است. پس حاصل ضرب **ب هـ** در **هـ ز** با مربّع **جـ ز** برابر با مربّع **جـ هـ** است. و مربّع **جـ هـ** برابر [مجموع] مربّعات **جـ د** و **د هـ** و دو برابر حاصل ضرب یکی در دیگری است. و مربّعات **جـ د** و **د هـ** برابر مربّع **جـ ز** است. آنها را حذف می‌کنیم. حاصل ضرب **ب هـ** در **هـ ز** مساوی با دو برابر حاصل ضرب **جـ د** در **د هـ** باقی می‌ماند. دو برابر حاصل ضرب **ب هـ** در **جـ ز**[3] را [به‌طور] مشترک [به طرفین تساوی] اضافه می‌کنیم. پس [نتیجهٔ] حاصل ضرب **هـ ز** در **ب هـ**[4] و **ب هـ** در **جـ ز**[5] مساوی مربّع **هـ ب** می‌شود که مساوی با دو برابر حاصل ضرب **جـ ز**[6] در **ب جـ** و **جـ د** در **د هـ** است.

[قضیهٔ پنجم]: در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر از یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمه [قطعه‌ای] مساوی با ضلع دیگر [زاویهٔ قائمهٔ] آن جدا کنیم، آنگاه مربّع دو ضلع زاویهٔ قائمه در مثلث اوّل، اگر به صورت یک خط راست در نظر گرفته شود، و مربّع تفاضل بین آنها مساوی دو برابر مربّع وتر آن است.

مثال: مثلث **ا ب جـ** با زاویهٔ قائمهٔ **ب** [را در نظر می‌گیریم] و [فرض می‌کنیم] **ب د** برابر با **ا ب** باشد. و **ب هـ** را برابر با **ا ب** جدا می‌کنیم، می‌گویم که [مجموع] مربّعات **هـ جـ** و **جـ د** دو برابر مربّع **ا جـ** است.

---

۱. در متن عربی عبارت «و مساوی دو برابر حاصل ضرب دو ضلع زاویهٔ آن» تکرار شده است.
۲. نسخه: **جـ د**.
۳. نسخه: **هـ ز**.
۴. نسخه: **ب ز**.
۵. نسخه: **هـ ز**.
۶. نسخه: **هـ ز**.



شکل ۳. ۲. ۵

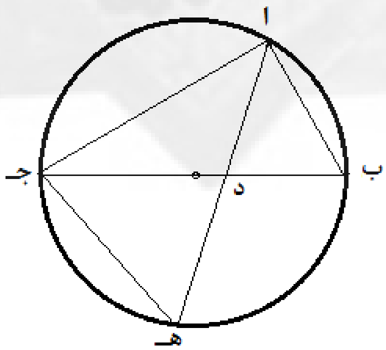
[برهان]: پس [طبق فرض قضیه] **هـ د** در نقطهٔ **ب** به دونیم شده است. و **د جـ** به آن اضافه شده است، پس [مجموع] مربّعات **هـ جـ** و **جـ د** دو برابر [مجموع] مربّعات **هـ ب** و **ب جـ** است. ولی [مجموع] مربّعات **هـ ب**، **ب جـ** مساوی با مربّع **ا جـ** است، پس [مجموع] مربّعات **هـ جـ** و **د جـ** دو برابر مربّع **ا جـ** است و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این آخر کتاب خواص مثلث قائم‌الزاویه از ارشمیدس است.

[پیوست رساله]

خداوند عزیز است

[قضیهٔ ششم]: [در] مثلث **ا ب جـ** زاویهٔ **ا** توسط خط **ا د** دونیم شده است، می‌گوییم که حاصل ضرب **ب د** در **د جـ** با مربّع **ا د** مساوی با حاصل ضرب **ب ا** در **ا جـ** است.

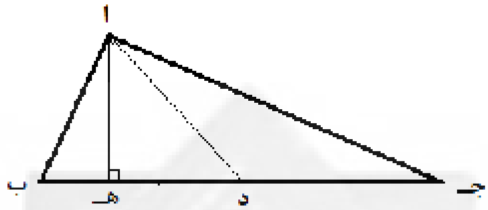


شکل ۳. ۲. ۶

[برهان]: پس بر آن [مثلث] دایره [محیطی آن را] می‌گذرانیم و **ا د** را تا نقطهٔ **هـ** امتداد می‌دهیم و **هـ جـ** را رسم می‌کنیم. چون دو زاویهٔ **ا** (زاویه‌های **ب ا د** و **جـ ا د**) مساوی‌اند و دو زاویهٔ **ب** و **هـ** [نیز] متساوی‌اند، زیرا مقابل به کمان **ا جـ** اند، [پس] زاویهٔ باقیماندهٔ **ب د ا** مساوی زاویهٔ **هـ جـ ا** است. پس مثلث **ب ا د** متشابه با مثلث **ا هـ جـ** است. پس نسبت **ب ا** به **ا هـ** مساوی نسبت **ا د** به **ا جـ**

است. پس حاصل ضرب **ب ا** در **ا ج** برابر حاصل ضرب **ه ا** در **ا د** است. ولـی حاصـل ضـرب **ه ا** در **ا د** برابر حاصل ضرب **ه د** در **د ا** و مربّـع **ا د** اسـت. و حاصـل ضـرب **ه د** در **د ا** برابـر حاصـل ضرب **ب د** در **د ج** است. پس حاصل ضرب **ب د** در **د ج** و مربّع **د ا** برابر حاصل ضـرب **ب ا** در **ا ج** است و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

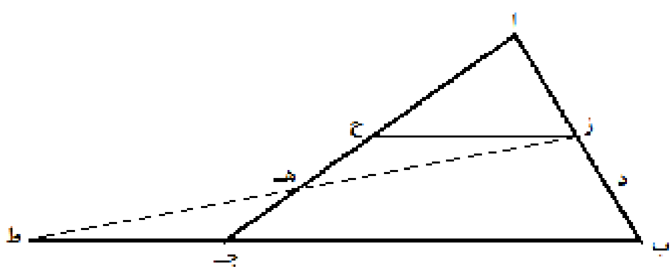
[قضیهٔ هفتم]: [در] مثلث **ب ا ج** ضلع **ب ج** در نقطهٔ **د** به دونیم شده و **ا د** را رسـم مـی‌کنیم. مـی‌گـویم که [مجموع] دو مربع **ب د** و **د ج** و دو برابر مربّع **ا د** مساوی با [مجموع] دو مربع **ب ا** و **ا ج** است.



شکل ۳. ۲. ۷

برهان: عمود **ا ه** را رسم می‌کنم. چون زاویهٔ **ا د ج** منفرجه است، مربّـع **ا ج** مسـاوی [مجمـوع] مربّعات **ا د** و **د ج** و دو برابر حاصل ضرب **د ج** در **د ه** است. مربّع **ب ا** و دو برابـر حاصـل ضـرب **ب د** در **د ه** مسـاوی [مجمـوع] مربّعـات **ب د** و **د ا** اسـت، زیـرا زاویـهٔ **ا د ب** حـاده اسـت. پـس [مجموع] مربّعات **ب ا** و **ا ج** و دو برابر حاصل ضرب **ب د** در **د ه** مسـاوی مربّعـات **ب د** و **د ج** و دو برابر مربع **ا د** و دو برابر حاصل ضرب **د ه** در **د ج** است. ولی دو برابر حاصل ضـرب **د ه** در **د ج** مساوی دو برابر حاصل ضرب **ا د** در **د ه** اسـت. پـس آنهـا را حـذف مـی‌کنیم. بنـابراین [مجمـوع] مربّعات **ب ا** و **ا ج** مساوی با [مجموع] مربّعات **ب د** و **د ج** و دو برابر مربّع **ا د** است، و این چیزی است که می‌خواستیم بیان کنیم.

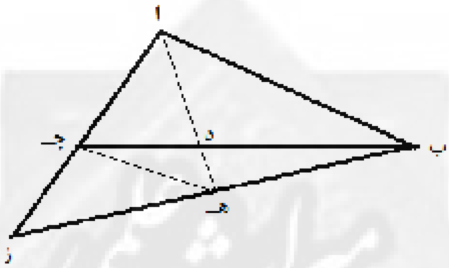
[قضیهٔ هشتم]: [در] مثلث **ب ا ج** دو خـط **د ه**، **ز ح** بـا **ب ج** موازی‌انـد و **ب د** برابـر **د ز** اسـت، می‌گویم که مجموع **ب ج** و **ز ح** مساوی دو برابر **د ه** است.



شکل ۳. ۲. ۸

[برهان]: **ز ه** را به‌طور مستقیم تا نقطهٔ **ط** امتداد می‌دهیم. پس مثلث **ه ج ط** متشابه با مثلث **ز ح ه** است و **ح ه** برابر **ه ج** است، زیرا **ب د** برابر **د ز** است؛ پس **ز ح** برابر **ج ط** است. ولی مثلث **ز د ه** متشابه با مثلث **ز ب ط** است، پس نسبت **ب ط** به **د ه** برابر نسبت **ب ز** به **ز د** است و **ب ز** دو برابر **ز د** است؛ پس **ب ط** دو برابر **د ه** است. ولی **ب ط** مجموع **ب ج**، **ز ح** است و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[**قضیهٔ نهم**]: افزودهٔ برهانی بر قضیهٔ سوم از [مقالهٔ] ششم کتاب [اصول] اقلیدس. مثلث **ا ب ج** مفروض است و در آن زاویهٔ **ا** توسط خطّ **ا د** به دونیم شده است، می‌گوییم که نسبت **ا ب** به **ا ج** برابر نسبت **ب د** به **د ج** است.



شکل ۳. ۲. ۹

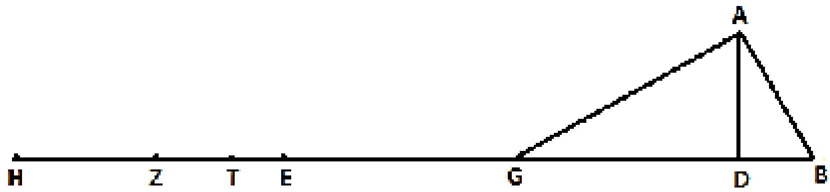
برهان: **ا ج** را در راستایش تا نقطهٔ **ز** امتداد می‌دهم چنان‌که [طول آن] برابر **ا ب** باشد و **ز ب** را وصل می‌کنم. و **ا د** را تا نقطهٔ **ه** امتداد داده و **ج ه** را وصل می‌کنم. پس نسبت [مساحت] مثلث **ا ه ز** به [مساحت] مثلث **ا ه ج** برابر نسبت **ا ز** به **ا ج** یعنی **ا ب** به **ا ج** است. و نسبت [مساحت مثلث] **ا ه ب** به [مساحت مثلث] **ا ه ج** برابر نسبت **ا ه ب** به **ا ه ج** است، زیرا [دو مثلث] **ا ه ز**، **ا ه ب** متساوی‌اند. و با ترکیب نسبت، نسبت **ا ه ب** به **ا ه ج**، برابر نسبت **ب د** به **د ج** است و با نسبت مساوات (قضیهٔ ۱۱ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس)، نسبت **ا ب** به **ا ج** برابر نسبت **ب د** به **د ج** است، و این چیزی است که می‌خواستیم.

شرح رساله

[۱]. قضیهٔ اول

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس A، مربع محیط، هرگاه به صورت یک خط راست در نظر گرفته شود، مساوی با دو برابر حاصل ضرب مجموع محیط و عمود وارد بر وتر در وتر آن است.

برهان: ضلع BG را امتداد می‌دهیم و روی آن پاره‌خط‌های GE، EZ، ZH و GT را به ترتیب به صورت زیر جدا می‌کنیم:



شکل ۳. ۳. ۱

$$GE = AG \qquad EZ = AB \qquad ZH = AD \qquad GT = BG \qquad (1)$$

چون $GT = BG$، پس نقطهٔ G وسط پاره‌خط BT است. TZ را به آن اضافه می‌کنیم. پس بنا بر قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس[1] داریم:

$$BZ.ZT + TG^2 = GZ^2 \qquad (2)$$

اما $GZ = GE + EZ$، بنابراین

$$GZ^2 = (GE + EZ)^2 = EZ^2 + GE^2 + 2EZ.GE \qquad (3)$$

از طرفی بنا بر رابطهٔ فیثاغورس[2] در مثلث ABG داریم:

$$AG^2 + AB^2 = BG^2 \qquad (4)$$

و از طرف دیگر $GE = AG$، $EZ = AB$ و $BG = GT$، پس

$$GE^2 + EZ^2 = GT^2 \qquad (5)$$

بنابراین از رابطه‌های (۳) و (۵) داریم:

$$GZ^2 = GT^2 + 2GE \cdot EZ \qquad (6)$$

از رابطه‌های (۲) و (۶) داریم:

$$BZ \cdot ZT + TG^2 = GZ^2 = GT^2 + 2GE \cdot EZ \qquad (7)$$

با حذف مقدار مشترک GT^2 از طرفین تساوی داریم:

$$BZ \cdot ZT = 2GE \cdot EZ \qquad (8)$$

بنا بر تعریف مساحت مثلث، با فرض این که BG قاعده و AD ارتفاع و این که دو ضلع AB و AG بر هم عمودند، داریم:

$$BG \cdot AD = AB \cdot AG \qquad (9)$$

۱. اگر خط راستی نصف شده و بر امتداد آن خط راستی افزوده شده باشد، مستطیل حاصل از تمامی خط راست به‌دست‌آمده و خط راست افزوده‌شده به‌علاوهٔ مربع نصف خط راست اصلی با مربع خط راست حاصل از خط افزوده‌شده و نصف خط اصلی مساوی است.

۲. قضیهٔ ۴۷ مقالهٔ اول اصول اقلیدس.

با ضرب طرفین تساوی در عدد ۲ به رابطهٔ

$$2BG \cdot AD = 2AB \cdot AG \qquad (10)$$

می‌رسیم. اما $2BG = BT$، $AB = ZE$، $AD = ZH$ و $AG = GE$، پس از رابطهٔ (۱۰) داریم:

$$BT \cdot HZ = 2GE \cdot EZ \qquad (11)$$

بنابراین از رابطه‌های (۸) و (۱۱) داریم:

$$BT.HZ = BZ.ZT \qquad (12)$$

پس بنا بر خاصیت تناسب[1] داریم:

$$BT \cdot HZ = BZ \cdot ZT \rightarrow \frac{HZ}{ZB} = \frac{ZT}{TB} \qquad (13)$$

با ترکیب نسبت[2] در صورت این تناسب داریم:

$$\frac{HZ}{ZB} = \frac{ZT}{TB} \rightarrow \frac{HZ+ZB}{ZB} = \frac{ZT+TB}{TB} \rightarrow \frac{HB}{ZB} = \frac{BZ}{TB} \qquad (14)$$

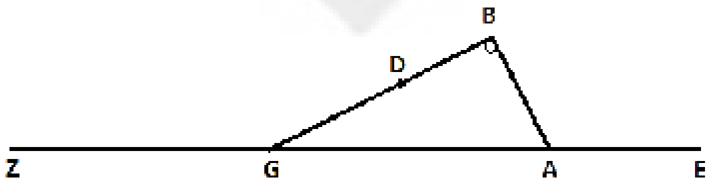
پس بنا بر خاصیت تناسب داریم:

$$\begin{aligned} & HB \cdot TB = BZ^2 \rightarrow \\ & (BG+AG+AB+AD) \cdot 2BG = BZ^2 \rightarrow \qquad (15) \\ & 2(BG+AG+AB+AD) \cdot BG = (BG+AG+AB)^2 \end{aligned}$$

درنتیجه مربع محیط مثلث، هرگاه به صورت خط راستی در نظر گرفته شود، مساوی با دو برابر حاصل ضرب وتر مثلث در مجموع محیط و عمود وارد بر وتر آن است.

[۲]. قضیهٔ دوم

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس B، با فرض این که $BG > AB$ باشد، مجموع مربعات محیط و تفاضل دو ضلع زاویهٔ قائمه مساوی با مجموع مربعات وتر با هر یک از دو ضلع زاویهٔ قائمه است.



شکل ۳. ۳. ۲

برهان: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس B وتر AG را از دو طرف تا نقاط E و Z امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که:

---

۱. قضیهٔ ۱۶ مقالهٔ ششم اصول اقلیدس.

۲. تعریف ۱۴ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس.

$$GZ = BG \text{ و } EA = AB \quad (1)$$

روی ضلع BG نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که: $BG - AB = BD$. پس

$$GD = AB \quad (2)$$

چون $EZ = EA + AG + GZ$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} EZ^2 &= (EA + AG + GZ)^2 \\ &= EA^2 + AG^2 + GZ^2 + 2EA \cdot AG + 2AG \cdot GZ + 2EA \cdot GZ \end{aligned} \quad (3)$$

از طرف دیگر چون $BG = BD + GD$ ، داریم:

$$2EA \cdot GZ = 2AB \cdot BG = 2AB \cdot GD + 2GD \cdot BD \quad (4)$$

اما بنا بر رابطهٔ (۲) داریم

$$2AB \cdot GD = 2AB^2 = AB^2 + GD^2 \quad (5)$$

بنا بر آن‌که $BG = BD + DG$ ، داریم:

$$2BD \cdot GD + GD^2 + BD^2 = BG^2 \quad (6)$$

اما $2AB \cdot BG + BD^2$

بنا بر رابطهٔ (۴) $= 2AB \cdot GD + 2GD \cdot BD + BD^2$

بنا بر رابطهٔ (۵) $= AB^2 + GD^2 + 2GD \cdot BD + BD^2$

بنا بر رابطهٔ (۶) $= AB^2 + BG^2$

بنا بر رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $ABG\triangle$ $= AG^2$

بنابراین داریم:

$$2AB \cdot BG + BD^2 = AB^2 + BG^2 = AG^2 \quad (7)$$

پس از رابطه‌های (۴) و (۷) داریم:

$$2EA.GZ + BD^2 = AG^2 \quad (8)$$

اکنون از رابطه‌های (۳) و (۸) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} EZ^2 + BD^2 &= EA^2 + AG^2 + AG^2 + GZ^2 + 2EA \cdot AG + 2AG \cdot GZ \\ &= EA^2 + 2AG^2 + GZ^2 + 2EA \cdot AG + 2AG \cdot GZ \end{aligned} \quad (9)$$

اما $AZ = AG + GZ$ و $EG = EA + AG$

بنابراین

$$EG^2 = EA^2 + AG^2 + 2EA \cdot AG \quad (10)$$

و

$$AZ^2 = AG^2 + GZ^2 + 2AG \cdot GZ \quad (11)$$

با جمع طرفین تساوی‌های (۱۰) و (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} EG^{2} &= EA^{2} + AG^{2} + 2EA \cdot AG \\ \underline{AZ^{2}} &\underline{= AG^{2} + GZ^{2} + 2AG \cdot GZ} \\ EG^{2} + AZ^{2} &= EA^{2} + 2AG^{2} + GZ^{2} + 2EA \cdot AG + 2AG \cdot GZ \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۹) و (۱۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$EZ^{2} + BD^{2} = EG^{2} + AZ^{2}$$

و حکم ثابت است.

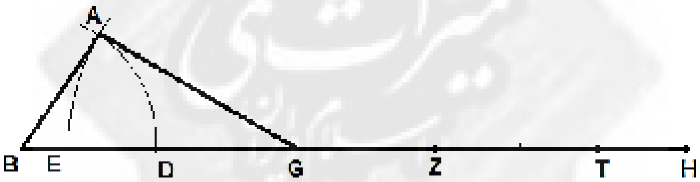
[۳]. قضیهٔ سوم

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس A روی وتر BG پاره‌خط‌های BD و GE را بـه ترتیـب مسـاوی بـا AB و AG جدا می‌کنیم. سپس وتر BG را امتداد می‌دهیم و پاره‌خط‌های GZ، ZH و ZT را به صورت

$$HT = DE \quad \text{و} \quad ZH = AG \quad \text{و} \quad GZ = AB$$

جدا می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$(AB + BG + AG) \cdot DE = 4S_{ABG}$$



شکل ۳. ۳. ۳

برهان: با توجه به فرض قضیه داریم:

$$\begin{aligned} BG &= BD + GE - DE \\ &= AB + AG - DE \\ &= ZG + HZ - HT \\ &= TG \end{aligned} \qquad (۱)$$

بنابراین $BG = TG$ و لذا G وسط نقاط B و T است. پاره‌خط TH را به آن اضافه می‌کنیم. پس بنا بـر قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس داریم:

$$BH.HT + GT^{2} = GH^{2} \qquad (۲)$$

اما $GH = GZ + ZH$، بنابراین

$$GH^{2} = (GZ + ZH)^{2} = GZ^{2} + ZH^{2} + 2GZ \cdot ZH \qquad (۳)$$

پس بنا بر آن‌که $GZ = AB$ و $ZH = AG$ داریم:

$$GH^{2} = AB^{2} + AG^{2} + 2GZ \cdot ZH \qquad (۴)$$

از طرفی بنا بر رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ABG داریم:

$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \rightarrow GZ^2 + ZH^2 = BG^2 \qquad (5)$$

پس، از رابطه‌های (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم که:

$$GH^2 = BG^2 + 2GZ \cdot ZH \qquad (6)$$

بنابراین از رابطه‌های (۲) و (۶) داریم:

$$BH \cdot HT + GT^2 = GH^2 = BG^2 + 2GZ \cdot ZH \qquad (7)$$

با حذف مقادیر مساوی، $BG^2 = TG^2$، از طرفین تساوی داریم:

$$BH \cdot HT = 2GZ \cdot ZH \qquad (8)$$

اما

$$GZ \cdot ZH = AB \cdot AG = 2S_{ABG} \qquad (9)$$

بنابراین از رابطه‌های (۸) و (۹) داریم:

$$BH \cdot HT = 4S_{ABG} \qquad (10)$$

چون $BH = AB + AG + BG$ و $HT = DE$ درنتیجه

$$(AB + BG + AG) \cdot DE = 4S_{ABG}$$

و حکم ثابت است.

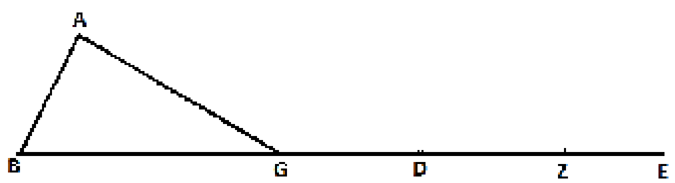
[۴]. قضیهٔ چهارم

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس A، مربّع محیط، هرگاه به صورت خط راستی در نظر گرفته شود، مساوی با دو برابر مجموع حاصل ضرب محیط در وتر آن و حاصل ضرب دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن است.

برهان: مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس A را در نظر می‌گیریم و ضلع BG را امتداد می‌دهیم و روی آن پاره‌خط‌های GD، DE و GZ را به صورت زیر جدا می‌کنیم:

$$GZ = BG \text{ و } DE = AG \text{ و } GD = AB \qquad (1)$$

چون $GZ = BG$، پس G نقطهٔ وسط پاره‌خط BZ است. پاره‌خط ZE را به آن اضافه می‌کنیم. پس بنا بر قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس داریم:



شکل ۳. ۳. ۴

$$BE.EZ+GZ^{۲}=GE^{۲} \qquad (۲)$$

اما $GE=GD+DE$، بنابراین

$$GE^{۲}=(GD+DE)^{۲}=GD^{۲}+DE^{۲}+۲GD\cdot DE \qquad (۳)$$

از طرف دیگر بنا بر رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG داریم:

$$AB^{۲}+AG^{۲}=BG^{۲} \qquad (۴)$$

چون $AB=GD$ و $DE=AG$، پس

$$GD^{۲}+DE^{۲}=BG^{۲} \qquad (۵)$$

و چون $GZ=BG$، پس

$$GD^{۲}+DE^{۲}=GZ^{۲} \qquad (۶)$$

پس از رابطه‌های (۳) و (۶) داریم:

$$GE^{۲}=GZ^{۲}+۲GD\cdot DE \qquad (۷)$$

و از رابطه‌های (۲) و (۷) داریم:

$$BE\cdot EZ+GZ^{۲}=GZ^{۲}+۲GD\cdot DE \qquad (۸)$$

با حذف $GZ^{۲}$ از طرفین تساوی داریم:

$$BE\cdot EZ=۲GD\cdot DE \qquad (۹)$$

به طرفین تساوی، $۲BE\cdot BG$ را اضافه می‌کنیم. بنابراین

$$BE\cdot EZ+۲BE\cdot BG=۲GD\cdot DE+۲BE\cdot BG \qquad (۱۰)$$

و درنتیجه

$$BE(EZ+۲BG)=۲(GD\cdot DE+BE\cdot BG) \qquad (۱۱)$$

اما $GZ=BG$، پس $۲BG=BG+GZ=BZ$ و لذا $EZ+۲BG=EZ+BZ=BE$. درنتیجه

$$BE(EZ+۲BG)=BE^{۲} \qquad (۱۲)$$

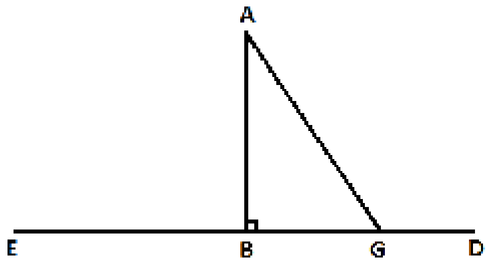
بنابراین از رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) حکم به صورت

$$BE^{۲}=۲(GD\cdot DE+BE\cdot BG) \qquad (۱۳)$$

به دست می‌آید.

[۵]. قضیهٔ پنجم

اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG در رأس B، بر امتداد ضلع BG پاره‌خط‌های BD و BE را مساوی AB و در دو طرف نقطهٔ B جدا کنیم، آنگاه $GE^{۲}+GD^{۲}=۲AG^{۲}$.



شکل ۳. ۳. ۵

برهان: چون

$$BD = BE = AB \quad (۱)$$

پس نقطهٔ B وسط پاره‌خط ED است. پس بنا بر قضیهٔ ۹ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس[1] داریم:

$$EG^۲ + GD^۲ = ۲(EB^۲ + BG^۲) \quad (۲)$$

اما بنا بر رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABG داریم:

$$AB^۲ + BG^۲ = AG^۲ \quad (۳)$$

پس بنا بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$EB^۲ + BG^۲ = AG^۲ \quad (۴)$$

پس، از رابطه‌های (۲) و (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$EG^۲ + GD^۲ = ۲AG^۲ \quad (۵)$$

و حکم ثابت است.

[۶]. قضیهٔ ششم

اگر نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABG ضلع BG را در نقطهٔ D قطع کند، آنگاه

$$BD \cdot DG + AD^۲ = AB \cdot AG$$

برهان: دایرهٔ محیطی مثلث ABG را رسم می‌کنیم و AD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند. از E به G وصل می‌کنیم. چون AD نیمساز زاویهٔ $\measuredangle BAG$ است، پس

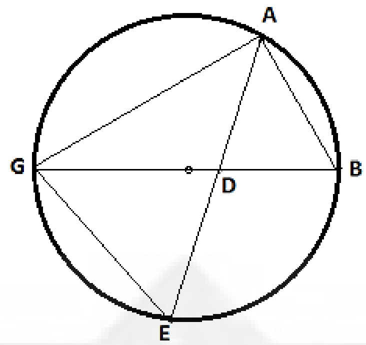
$$\measuredangle BAD = \measuredangle GAD \quad (۱)$$

از طرف دیگر

$$\measuredangle ABG = \measuredangle AEG = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AG} \quad (۲)$$

۱. اگر خط راستی به قطعه‌های مساوی و نامساوی تقسیم شده باشد، مربع‌های آن دو قطعهٔ نامساوی که مجموع آنها مساوی تمام خط است با دو برابر مربع‌های نیمهٔ خط و خط راست بین نقاط تقسیم، مساوی‌اند.

پس دو زاویهٔ باقیماندهٔ مثلث‌های $\triangle ABD$ و $\triangle AEG$ (زاویه‌های $\measuredangle ADB$ و $\measuredangle AGE$) مساوی می‌شوند. درنتیجه دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle AEG$ متشابه می‌شوند. پس اضلاع آنها متناسب خواهند شد و درنتیجه:



شکل ۳. ۳. ۶

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{EG}=\frac{AD}{AG} \qquad (۳)$$

پس بنا بر قضیهٔ ۱۶ مقالهٔ ششم اصول اقلیدس داریم:

$$AB\cdot AG=AE\cdot AD \qquad (۴)$$

اما بنا بر قضیهٔ سوم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس داریم:

$$AE\cdot AD=ED\cdot AD+AD^۲ \qquad (۵)$$

پس، از رابطه‌های (۴) و (۵) داریم:

$$AB\cdot AG=ED\cdot AD+AD^۲ \qquad (۶)$$

ولی بنا بر قضیهٔ ۳۵ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس داریم:

$$ED\cdot AD=BD\cdot DG \qquad (۷)$$

پس، از رابطه‌های (۶) و (۷) داریم:

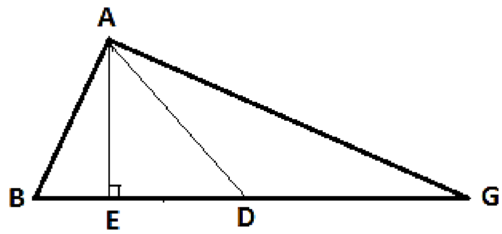
$$AB\cdot AG=BD\cdot DG+AD^۲ \qquad (۸)$$

و حکم ثابت است.

[۷]. قضیهٔ هفتم

اگر در مثلث ABG از رأس A میانهٔ AD را رسم کنیم، آنگاه

$$BD^۲+DG^۲+۲AD^۲=AB^۲+AG^۲$$



شکل ۳. ۳. ۸

برهان: عمود AE را بر ضلع BG رسم می‌کنیم. با رسم میانهٔ AD، چون مثلث مختلف‌الاضلاع است، دو زاویهٔ پدید آمده در نقطهٔ D (زاویه‌های $\measuredangle ADG$ و $\measuredangle ADB$) یکی حاده و دیگری منفرجه است. بدون آنکه به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم زاویهٔ $\measuredangle ADG$ منفرجه باشد. پس بنا بر قضیهٔ ۱۲ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس داریم:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 + 2DG \cdot DE \qquad (1)$$

از طرفی چون زاویهٔ $\measuredangle ADG$ منفرجه است، پس زاویهٔ $\measuredangle ADB$ حاده است. پس بنا بر قضیهٔ ۱۳ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس داریم:

$$AB^2 + 2BD \cdot DE = BD^2 + AD^2 \qquad (2)$$

با جمع طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{array}{l} AG^2 = AD^2 + DG^2 + 2DG \cdot DE \\ \underline{AB^2 + 2BD \cdot DE = AD^2 + BD^2} \\ AG^2 + AB^2 + 2BD \cdot DE = AD^2 + DG^2 + 2DG \cdot DE + AD^2 + BD^2 \end{array} \qquad (3)$$

چون D وسط BG است، پس $BD = DG$. درنتیجه با ضرب طرفین تساوی در $2DE$ داریم:

$$2DE \cdot DG = 2DE \cdot BD \qquad (4)$$

با توجه به تساوی (۴) و با حذف مقادیر مشترک از طرفین تساوی در (۳) داریم:

$$AB^2 + AG^2 = BD^2 + DG^2 + 2AD^2$$

و حکم ثابت است.

[۸]. قضیهٔ هشتم

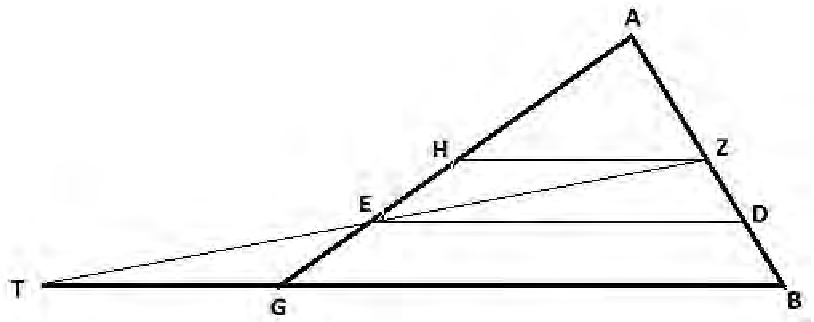
در مثلث ABG دو خط DE و ZH را موازی با BG رسم می‌کنیم و $BD = DZ$. ثابت می‌کنیم که:

$$BG + ZH = 2DE$$

برهان: از نقطهٔ Z به E وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا امتداد ضلع BG را در نقطهٔ T قطع کند. چون $BD = DZ$ و خطوط BG، DE و ZH موازی‌اند، پس بنا بر قضیهٔ ۲ مقالهٔ ششم اصول اقلیدس

داریم:

(۱) $$EH = EG$$



شکل ۳. ۳. ۱۰

از طرف دیگر چون خطوط BG، DE و ZH موازی‌اند، پس بنا بر قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ اول اصول اقلیدس داریم:

(۲) $$\measuredangle EGT = \measuredangle EHZ$$

مثلث‌های $\triangle EGT$ و $\triangle ZHE$ به حالت زض‌ز مساوی‌اند، زیرا

$$\left.\begin{array}{r} EG = EH \\ \measuredangle GET = \measuredangle ZEH \\ \measuredangle EGT = \measuredangle EHZ \end{array}\right\} \rightarrow \triangle EGT = \triangle ZHE$$

پس

(۳) $$GT = ZH$$

در مثلث $\triangle ZBT$، خطوط BT و DE موازی‌اند، پس بنا بر تعریف ۱ مقالهٔ ششم اصول دو مثلث $\triangle ZDE$ و $\triangle ZBT$ متشابهند. پس

(۴) $$\frac{BT}{DE} = \frac{BZ}{DZ} = \frac{ZT}{ZE}$$

اما بنا بر فرض $BD = DZ$، پس

(۵) $$BZ = ۲DZ$$

بنابراین از رابطه‌های (۴) و (۵) داریم:

(۶) $$BT = ۲DE$$

اما $BT = BG + GT$، پس، از رابطهٔ (۶) داریم:

(۷) $$۲DE = BG + GT$$

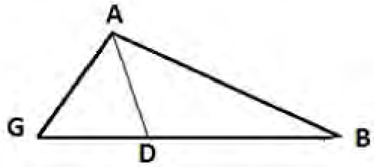
و درنتیجه از رابطه‌های (۳) و (۷) داریم:

$$۲DE = BG + ZH$$

[۹]. قضیهٔ نهم (قضیهٔ سوم مقالهٔ ششم *اصول* اقلیدس)

در مثلث مفروض $\triangle ABG$، اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد، آنگاه

$$\frac{AB}{AG}=\frac{BD}{DG}$$

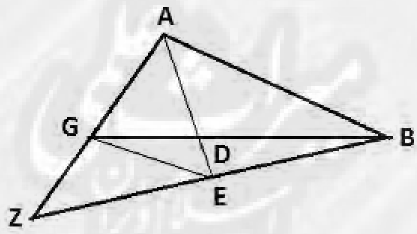


شکل ۳. ۳. ۱۳

برهان: AG را تا نقطهٔ Z امتداد می‌دهیم به‌طوری‌که:

$$AZ=AB \qquad (۱)$$

و نقاط Z و B را به هم وصل می‌کنیم. AD را امتداد می‌دهیم تا BZ را در نقطهٔ E قطع نماید. از E به G وصل می‌کنیم.



شکل ۳. ۳. ۱۴

پاره‌خط‌های AG و AZ که قاعده‌های دو مثلث $\triangle AEZ$ و $\triangle AEG$ هستند در یک امتدادند، پس بنا بر قضیهٔ اول مقالهٔ ششم اصول اقلیدس داریم:

$$\frac{S_{AEZ}}{S_{AEG}}=\frac{AZ}{AG}, AB=AZ \rightarrow \frac{S_{AEZ}}{S_{AEG}}=\frac{AB}{AG} \qquad (۲)$$

از طرف دیگر در مثلث $\triangle ABZ$، چون $AB=AZ$، مثلث متساوی‌الساقین است و چون AD نیمساز زاویهٔ رأس آن، A، است، پس دو مثلث $\triangle AEB$ و $\triangle AEZ$ مساوی‌اند و درنتیجه

$$S_{AEB}=S_{AEZ} \qquad (۳)$$

پس از رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{S_{AEB}}{S_{AEG}}=\frac{AB}{AG} \qquad (۴)$$

پاره‌خط‌های BD و DZ که قاعده‌های دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle ADG$ هستند در یک امتدادند و رأس

آنها (نقطهٔ A) مشترک است، پس بنا بر قضیهٔ اول مقالهٔ ششم اصول اقلیدس نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت قاعده‌های آنهاست، یعنی

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AGD}}=\frac{BD}{DG} \quad (۷)$$

از طرف دیگر پاره‌خط‌های BD و DZ که قاعده‌های دو مثلث $\triangle EBD$ و $\triangle EDG$ هستند، در یک امتدادند و رأس آنها (نقطهٔ E) مشترک است، پس نسبت مساحت‌های آنها، بنا بر قضیهٔ اول مقالهٔ ششم اصول اقلیدس، برابر با نسبت قاعده‌های آنهاست، یعنی

$$\frac{S_{EBD}}{S_{EGD}}=\frac{BD}{DG} \quad (۸)$$

پس بنا بر قضیهٔ ۱۲ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس از رابطه‌های (۷) و (۸)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AGD}}=\frac{BD}{DG},\frac{S_{EBD}}{S_{EGD}}=\frac{BD}{DG}\rightarrow\frac{S_{ABD}+S_{EBD}}{S_{AGD}+S_{EGD}}=\frac{BD}{DG}\rightarrow\frac{S_{AEB}}{S_{AEG}}=\frac{BD}{DG} \quad (۹)$$

پس، از رابطه‌های (۴) و (۹)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{AB}{AG}=\frac{BD}{DG}$$

و حکم ثابت است.

منابع

ابن ندیم، الفهرست، ترجمهٔ محمدرضا تجدد، انتشارات اساطیر، تهران، ۱۳۸۱ش، چاپ اول.

اقلیدس، اصول اقلیدس (سیزده مقاله)، به کوشش سر تامس لیتل هیث، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۷ش، چاپ اوّل.

دانش‌پژوه، محمدتقی، فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران: مجموعهٔ اهدایی امام جمعهٔ کرمان، مجلهٔ دانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران، سال ۱۳، ش ۱، مهر ۱۳۴۴ش.

همو، فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران، انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۳۹ش، جلد ۸.

درایتی، مصطفی، فهرستوارهٔ دستنوشت‌های ایران، کتابخانه، موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی، تهران، ۱۳۸۹ش، جلد ۷؛

زندگینامهٔ علمی دانشوران، زیر نظر احمد بیرشک، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۷۲ش، چاپ اول، جلد ۲.

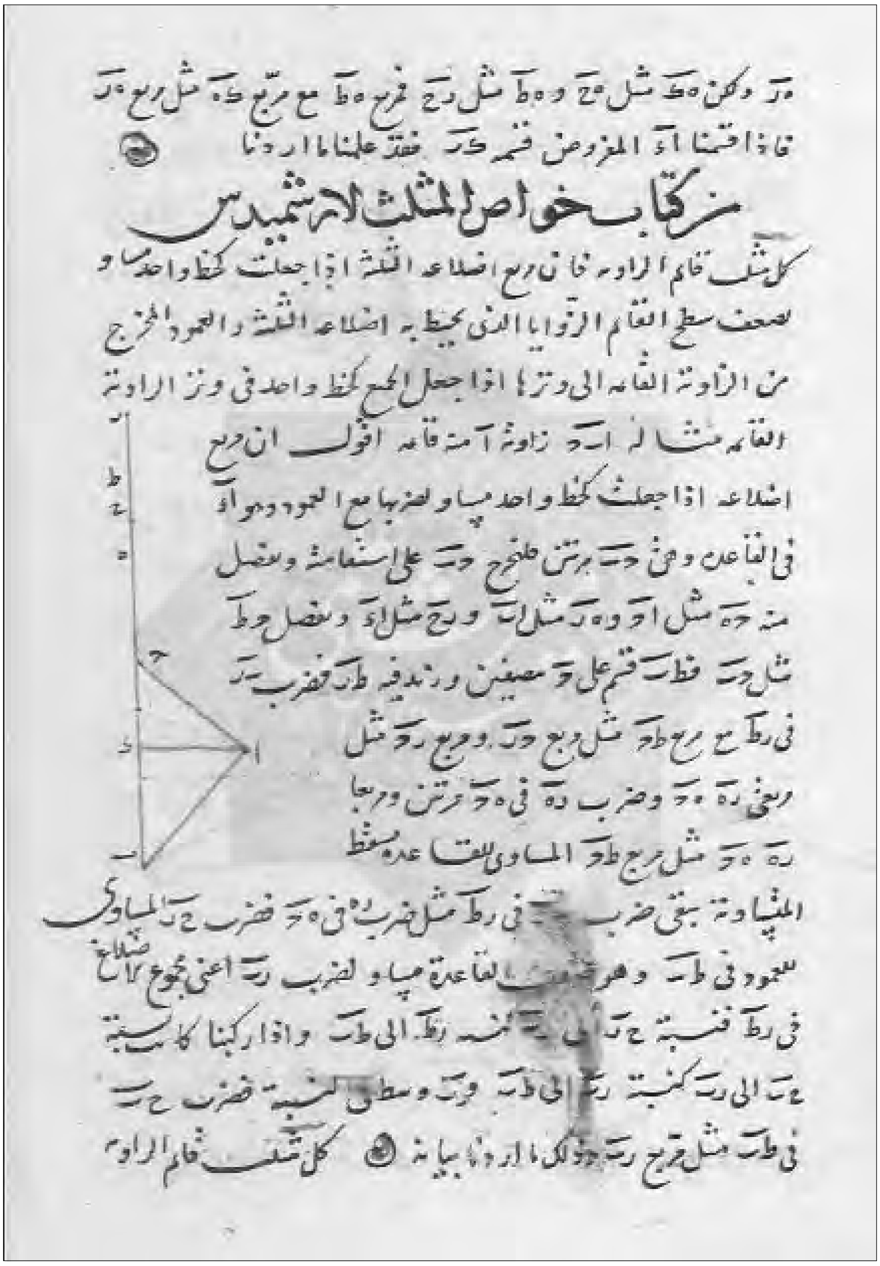
قفطی، علی، تاریخ الحکماء، به کوشش بهین دارائی، انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۴۷ش.

Archimedes, *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes*, tr. & commentary by T. L. Heath, Cambridge, 1897; 1912 (reprint: New York: Dover, n.d.).

Boris A. Rosenfeld & Ekmeleddin Ihsanoğlu, *Mathematicians, Astronomers, and Other Scholars of Islamic Civilization (and their works, 7th- 19th c.)*, Istanbul, Research Centre for Islamic History, Art and Culture (IRCICA), 2003.

Krause, Max, Stambuler Handschriften Islamischer Mathematiker, *Quellen und Studien zur*

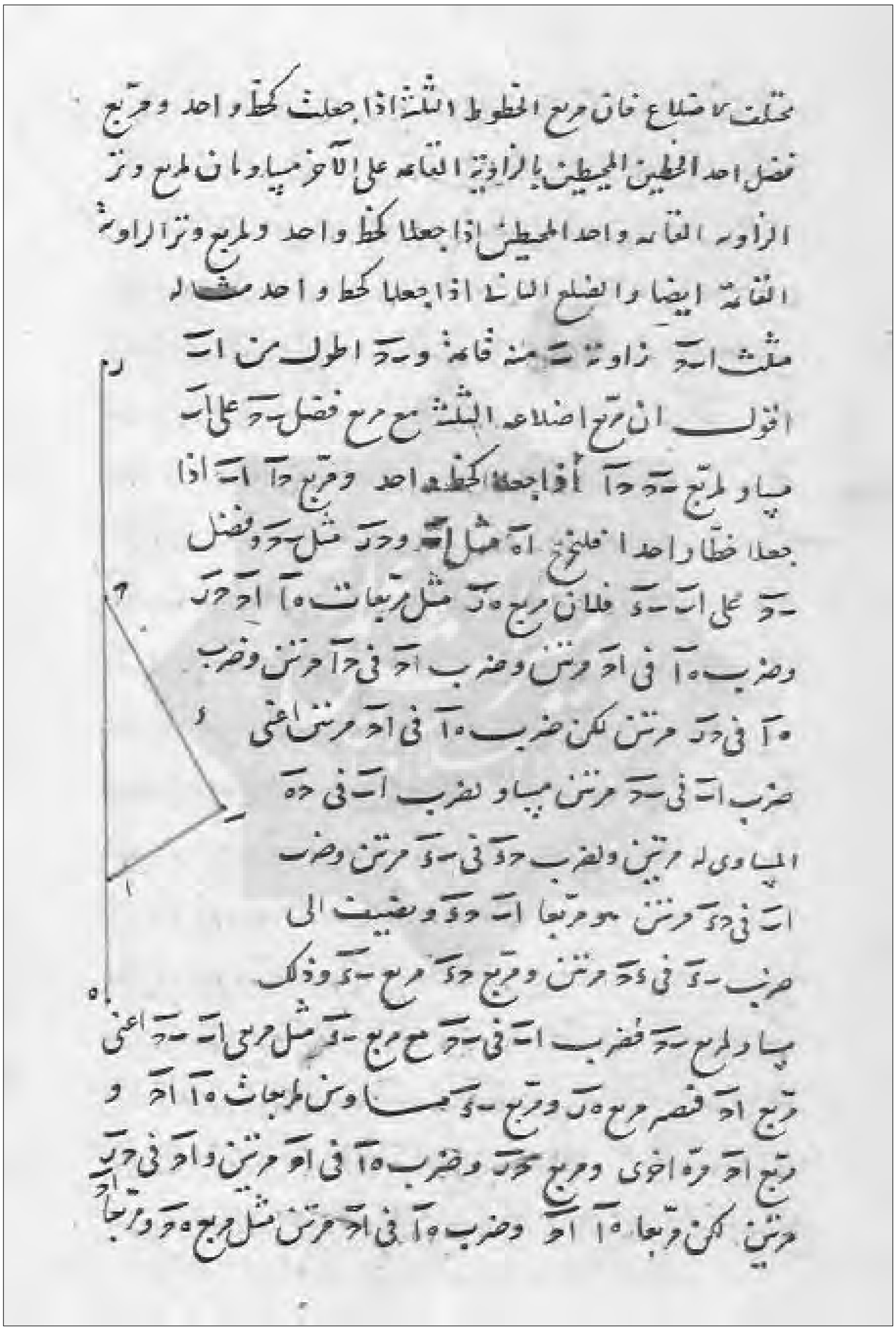
Geschichte der Mathemitik, Astronomie und Physik, Abteilung, B. 3, Berlin, 1936.
Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Mathematik, bis ca. 430H, Leiden, 1974.


بز ولكن هك مثل هح وهط مثل دح فربع هط مع مربع كه مثل ربع بز
فاذا اقتنا ا ز المفروض فنه كز فقد علمنا ما اردنا

من كتاب خواص المثلث لارشميدس

كل مثلث قائم الزاوية فان ربع اضلاع المثلث اذا جعلت كخط واحد مساو
لضعف سطح القائم الزوايا الذي يحيط به اضلاع المثلث والعمود المخرج
من الزاوية القائمة الى وترها اذا جعل الجميع كخط واحد في وتر الزاوية
القائمة مثاله ابج زاوية ا منه قائمة اقول ان ربع
اضلاعه اذا جعلت كخط واحد مساو لضربها مع العمود وهو اد
في القاعدة وهي بج برهانه فلنخرج بج على استقامة ونفصل
منه جه مثل اج وه ز مثل اب وبح مثل اد ونفصل حط
مثل بج فط ب نقسم على بنصفين ونزيد فيه طب فضرب بز
في زط مع مربع طب مثل مربع بز ومربع زه مثل
ربعي زه هج وضرب زه في هج مرتين ومربعا
زه هج مثل مربع طب المساوي لقاعده فيسقط
المتساوية يبقى ضرب [illegible] في زط مثل ضرب زه في هج فضرب ح ب المساوي
للعمود في طب وهو [illegible] القاعدة مساو لضرب زب اعني مجموع الاضلاع
في زط فنسبة ح ب الى [illegible] كنسبة زط الى طب واذا ركبنا كانت نسبة
ح ب الى زب كنسبة زط الى طب [illegible] ووسطى النسبة فضرب ح ب
في طب مثل مربع زب وذلك ما اردنا بيانه ◎ كل مثلث قائم الزاوية

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۱.



مختلف الاضلاع فان مربع الخطوط الثلثة اذا جعلت كخط واحد ومربع
فضل احد الخطين المحيطين بالزاوية القائمة على الآخر مساويان لمربع وتر
الزاوية القائمة واحد المحيطين اذا جعلا كخط واحد ولمربع وتر الزاوية
القائمة ايضا والضلع الثالث اذا جعلا كخط واحد مثاله
مثلث ابج زاوية ب منه قائمة وبج اطول من اب
اقول ان مربع اضلاعه الثلثة مع مربع فضل بج على اب
مساو لمربع بج دا اذا جعلا كخط واحد ومربع دا اب اذا
جعلا خطا واحدا فلنخرج اه مثل اب ودب مثل بج وفضل
بج على اب بد فلان مربع هج مثل مربعات ها اج جب
وضرب ها في اج مرتين وضرب اج في جا مرتين وضرب
ها في جب مرتين لكن ضرب ها في اج مرتين اعني
ضرب اب في بج مرتين مساو لضرب اب في ده
المساوي له مرتين ولضرب جد في بد مرتين وضرب
اب في دب مرتين هو مربعا اب دب وضيف الى
ضرب بد في دج مرتين ومربع جد مربع بد وذلك
مساو لمربع بج فضرب اب في بج مع مربع بد مثل مربعي اب بج اعني
مربع اج فصار مربع هج ومربع بد مساو من لمربعات ها اج و
مربع اج مرة اخرى ومربع جب وضرب ها في اج مرتين واج في جب
مرتين لكن مربعا ها اج وضرب ها في اج مرتين مثل مربع هج ومربعا

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۲.

وضرب اد في دز مرتين مثل مربع اد فمربعا هز زد مثل مرتين هد از

وذلك ما اردنا بيانه ○ كل مثلث قائم الزاوية فصل من احد طرفي

الزاوية القائمة مثل احد الضلعين المحيطين بها ومن الطرف الآخر

مثل الضلع الآخر فان ضرب الخط الذي بين النقطتين الفاصلتين

في محيط المثلث اعني الخطوط الثلثة التي يحيط المثلث اذا جعلت

كخط واحد اربعة امثال مساحة المثلث مثاله مثلث ابج زاوية ا

منه قائمة وقد فصل من القاعدة بد مثل اب ومنها ايضا جه مثل اج

اقول ان ضرب جملة الاضلاع في هد مثل اربعة امثال مساحة المثلث

برهانه ان خطي با اج قد انطبقا على خط بج وفضلا عنه خط

هد ونخرج بد ونجعل جز مثل با وبح مثل اج وجط مثل دز فلان

جط هو فضل ما بين خطي با اج و بج يبقى حط مثل بج فخط بط

قسم بنصفين على ج ونزيد فيه طح فيكون ضرب بح في طح مع مربع

جط مثل مربع جح لكن مربع جح مثل مربعي جد دح وضرب جد في

دح مرتين ومربعا جد دح مثل مربع بج فيكون ضرب بح في حط

مرتين مع مربع جط المساوي لجد مثل مربع بج وضرب جد في دح

مرتين فيسقط مربع بج المشترك يبقى ضرب بح في حط مثل ضرب دج

في دح مرتين لكن ضرب دج في دح مرتين اربعة امثال مساحة

مثلث ابج وذلك ما قصدنا تبيينه ○ كل مثلث قائم الزاوية

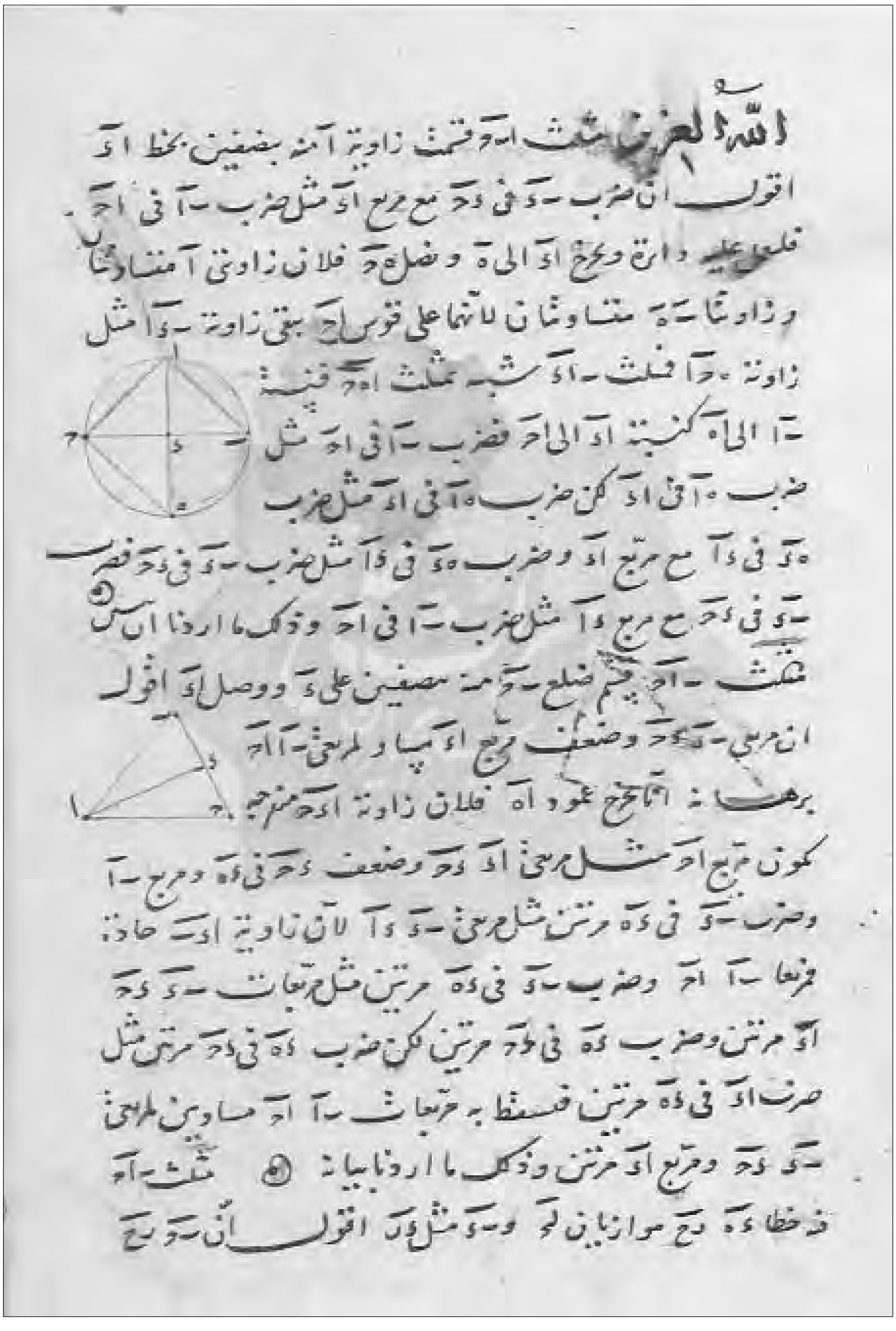
فان مربع اضلاعه الثلثة اذا جعلت كخط واحد مساو لضرب جميع

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۳.

الخط في وتر الزاوية القائمة مرتين وكضرب الطرفين احدهما في الآخر
مرتين ولضرب الطرفين احدهما في الآخر مرتين مثاله مثلث ا ب ج
وزاوية ا منه قائمة اقول ان مربع اضلاع المثلث كخط واحد
مساو لضرب ب ج في جملة الاضلاع مرتين وضرب ب ا في ا ج
مرتين فلنخرج د ج مثل ا ب و د ه مثل ا ج و د ز مثل ب ج ثم نقسم
بنصفين على نقطة ح ونزيد فيه ه ط فضرب ب ه في ه ز مع مربع
ح ز مثل مربع ح ه ومربع ح ه مثل مربعي د ح ه ح وضرب احدهما
في الآخر مرتين ومربعا د ح ه ح مثل مربع د ج نسقطهما فيبقى ضرب
ب ه في ه ز مثل ضرب د ج في ه ج مرتين باخذ ضرب ب ه في ز ح
مشتركا فيصير ضرب ه ج في ج ز و ب ه في ه ز وذلك مساو لمربع
ب ج مساو للضرب ه ز في ب ج و د ج في ه ج مرتين ه

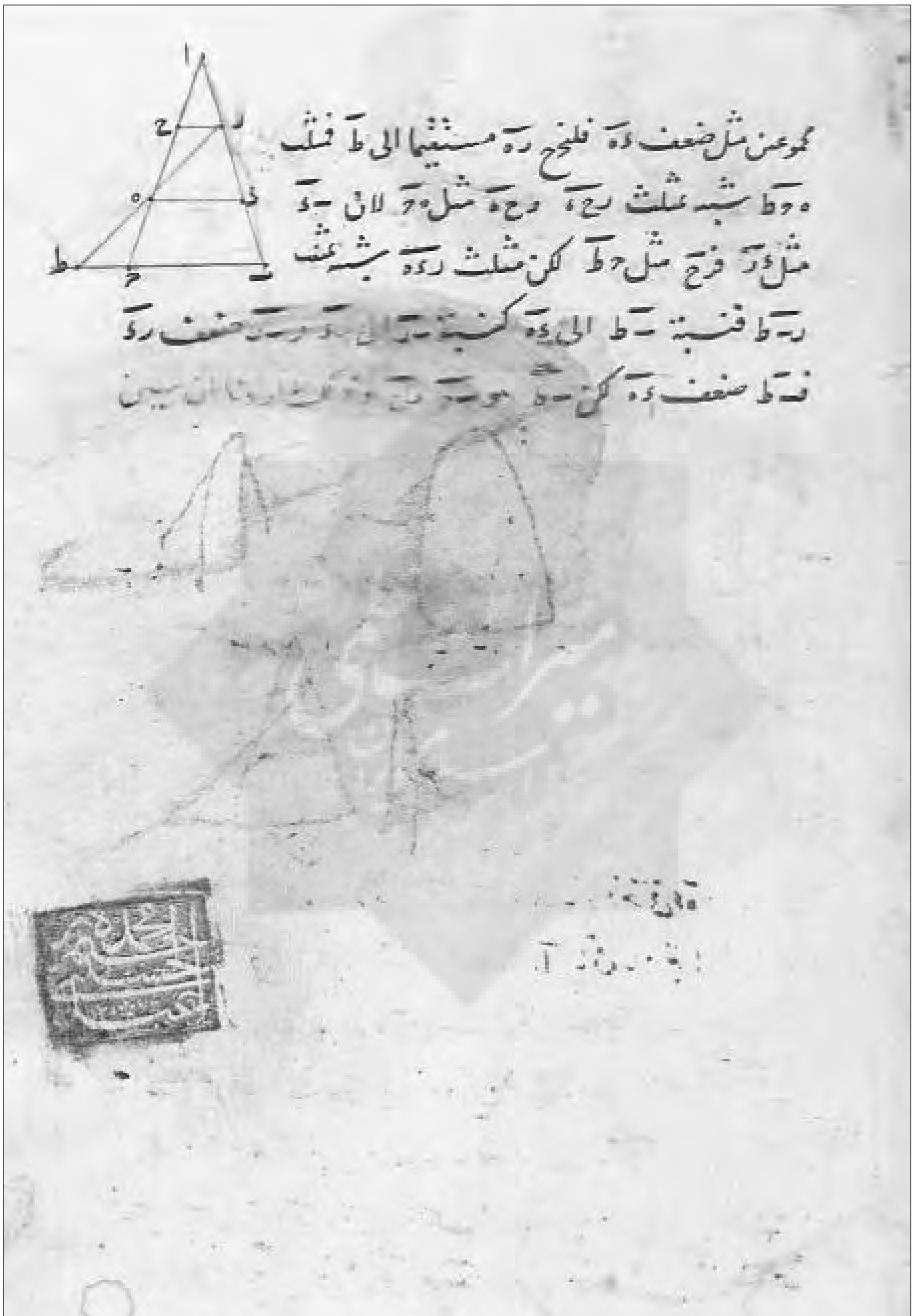
كل مثلث قائم الزاوية اذا فصل من احد الضلعين المحيطين
بالزاوية القائمة مثل الضلع الآخر فان مربع الضلعين المحيطين بزاوية
المثلث كالوتر اذا جعلا كخط واحد ومربع الفضل منهما ضعف
مربع وتر الزاوية القائمة مثاله مثلث ا ب ج زاوية ب منه قائمة
و ب د مثل ا ب و ب ح مثل ا ب اقول ان مربعي ه ج و د ج
ضعف مربع ا ج فلان ه ج قد قسم بنصفين على نقطة ب وزيد فيه
د ج فمربعا ه ج د ج ضعف مربعي ب ه ب ج لكن مربعا ب ج ب د مساويا ن
لمربع ا ج فمربعا ه ج د ج ضعف مربع ا ج وذلك ما اردنا ان نبين
هذا آخر المثلث من كتاب خواص المثلث القائم الزاوية لارشميدس

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۴.



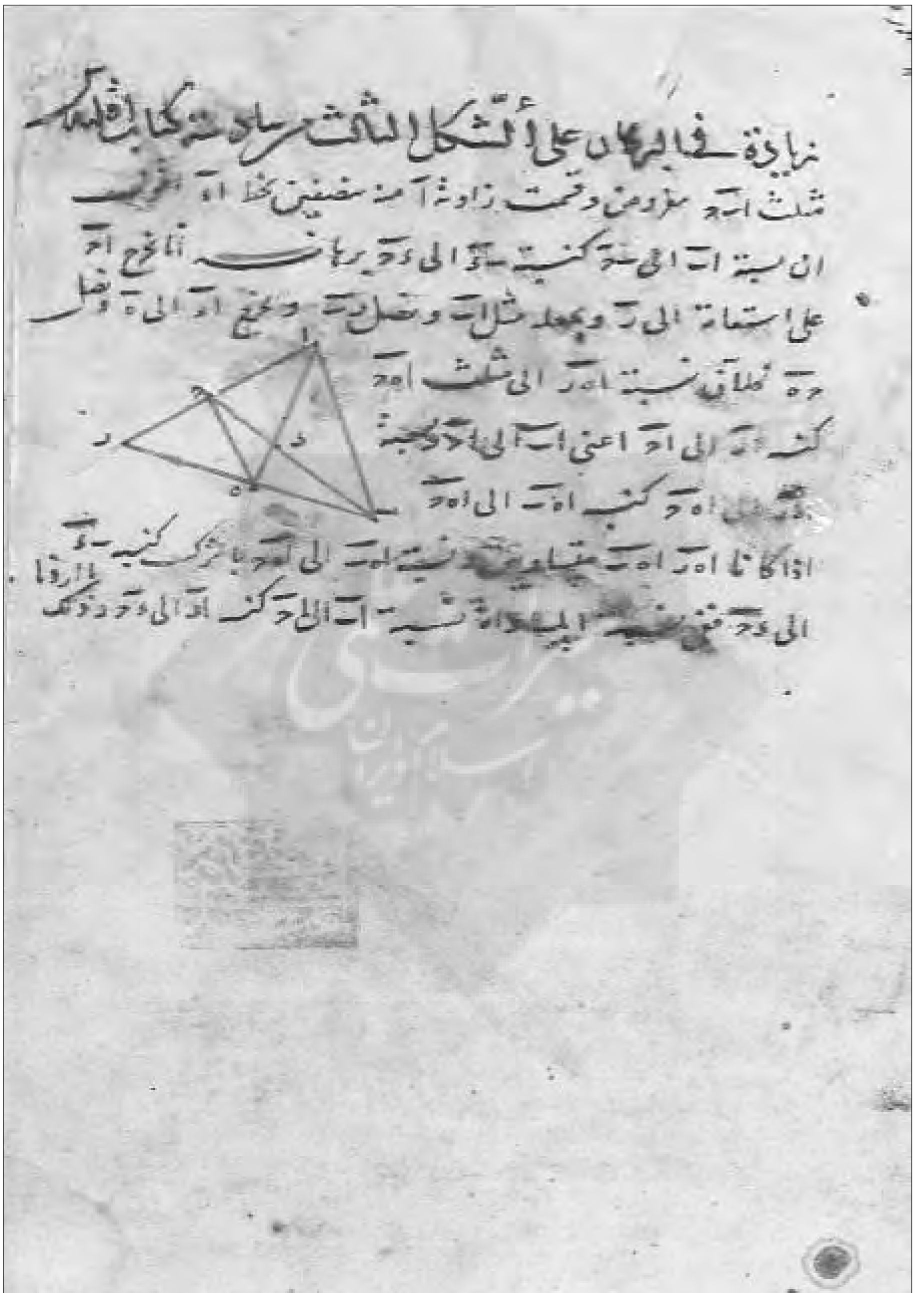
الله العزيز مثلث ا ه ح قسمت زاوية آ منه بنصفين بخط ا د
اقول ان ضرب ه د في د ح مع مربع ا د مثل ضرب ه آ في ا ح
فلنعمل عليه دائرة ونخرج ا د الى ه ونصل ه ح فلان زاويتي آ متساويتان
وزاويتا ه ح متساويتان لانهما على قوس ا ح بقي زاوية ه د آ مثل
زاوية ه ح آ فمثلث ه ا د شبيه بمثلث ا ه ح فنسبة
ه آ الى ا ه كنسبة ا د الى ا ح فضرب ه آ في ا ح مثل
ضرب ه آ في ا د لكن ضرب ه آ في ا د مثل ضرب
ه د في د آ مع مربع ا د وضرب ه د في د آ مثل ضرب ه د في د ح فضرب
ه د في د ح مع مربع د آ مثل ضرب ه آ في ا ح وذلك ما اردنا ان
مثلث ا ب ح قسم ضلع ب ح منه بنصفين على د ووصل ا د اقول
ان مربعي ب د د ح وضعف مربع ا د مساو لمربعي ب آ ا ح
برهانه انا نخرج عمود ا ه فلان زاوية ا د ح منفرجة
يكون مربع ا ح مثل مربعي ا د د ح وضعف د ح في د ه ومربع ب آ
وضرب ب د في د ه مرتين مثل مربعي ب د د آ لان زاوية ا د ب حادة
فمربعا ب آ ا ح وضرب ب د في د ه مرتين مثل مربعات ب د د ح
ا د مرتين وضرب د ه في د ح مرتين لكن ضرب د ه في د ح مرتين مثل
ضرب ا د في د ه مرتين فيسقط به مربعات ب آ ا ح مساوين لمربعي
ب د د ح ومربع ا د مرتين وذلك ما اردنا بيانه مثلث ب آ ح
فيه خطا د ه د ح موازيان [illegible] اقول ان [illegible]

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۵.



مجموعهن مثل ضعف د ه فلنخرج ز ه مستقیما الی ط فمثلث
ه و ط شبیه بمثلث ز ح ه و ح ه مثل ه و لان ب د
مثل د ز و ز ح مثل ح ط لکن مثلث ز د ه شبیه بمثلث
ز ب ط فنسبة ب ط الی د ه کنسبة ب ز الی د ز و ب ز ضعف ز د
فـ ب ط ضعف د ه لکن ب ط

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۶.


زيادة في البرهان على الشكل الثلث [illegible]

مثلث ابج مفروض ونخرج زاوية آ منه بنصفين بخط اد فنقول

ان نسبة اب الى بج كنسبة بد الى دج برهانه انا نخرج اج

على استقامة الى ز ونجعل مثل اب ونصل زب ونخرج اد الى ه ونصل

جه فلان نسبة اد الى [illegible] مثلث ادج

كنسبة ده الى اد اعني اب الى [illegible] ونسبة

[illegible] اد كنسبة اب الى اد

اذا كان اد [illegible] متساويين [illegible] نسبة اب الى اج [illegible] كنسبة بد

الى دج [illegible] نسبة اب الى اج كنسبة بد الى دج وذلك ما اردنا

رسالهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه، ص ۷.