مطالعهٔ مقاطع مخروطی در دورهٔ اسلامی*

یان. پ. هوخندایک[۱]
ترجمهٔ حسن امینی[۲]

هندسه در ریاضیات دورهٔ اسلامی از سه منظر متفاوت مطالعه شده است: برای کاربردهای عملی، برای کاربردهای نظری در علوم دیگر مثل نجوم، احکام نجوم و نورشناخت، و از منظر ریاضیات محض. دربارهٔ کاربرد عملی هندسه در دورهٔ اسلامی مثلاً دربارهٔ کاشیکاری یا کاربرد آن در معماری چیزهای اندکی می‌دانیم. ظاهراً مطالعهٔ مقاطع مخروطی برای صنعتگران اهمیت نداشته است. واقعیت دارد که دانشمندان دورهٔ اسلامی رابطهٔ میان مقاطع مخروطی و ساعت‌های آفتابی را مطالعه کرده‌اند. اما صنعتگران، ساعت‌های آفتابی را بر اساس جدول‌هایی می‌ساختند که موقعیت سایهٔ شاخص را برای مکانی معین و تمام اوقات روز و تمام موقعیت‌های خورشید به دست می‌داد. البته این جدول‌ها بدون علم به مقاطع مخروطی محاسبه شده بودند. همچنین واقعیت دارد که مسائلی در هندسهٔ عملی وجود داشته که به وسیلهٔ مقاطع مخروطی حل شده است. اما همانطور که خواهیم دید این راه حل‌ها ارزش عملی نداشتند. در دورهٔ اسلامی مدار بیضوی سیاره‌ها هنوز شناخته نشده بود. بنابراین هیچ کاربردی از مقاطع مخروطی در نجوم نمی‌توان یافت. برخی از منجمان قرن‌های چهارم و پنجم هجری، چون صاغانی و بیرونی، به کمک مقاطع مخروطی دربارهٔ انواع مختلف اسطرلاب بحث کرده‌اند. ساخت و کاربرد این نوع اسطرلاب‌ها بسیار دشوارتر از اسطرلاب معمولی است که در آن فقط خط مستقیم و دایره به کار رفته است.[۳]

کاربرد مقاطع مخروطی در نورشناخت مهم‌تر است. در دورهٔ باستان، هندسه‌دانان آینه‌های سوزان سهمی‌گون را مطالعه کردند، و هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی پژوهش دربارهٔ آینه‌های سوزان را ادامه دادند.[۴] ابن‌هیثم یک مسئلهٔ معروف نورشناخت را با تقاطع دایره و هذلولی حل کرد. اما هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی

---

* « L'étude des sections coniques dans la tradition Arabe », in: *Actes du 3ème colloque Maghrébin sur les Mathématiques Arabes*, Tipaza. Alger: École Normale Supérieure, 1998, pp. 147-158.

1. Hogendijk, J. P., J.P.Hogendijk@uu.nl

استاد ریاضیات و پژوهشگر تاریخ ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی در دانشگاه اوترخت (هلند).

۲. دانشجوی دکتری رشتهٔ فلسفهٔ علم، مؤسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران، Ehsan_am@yahoo.com.

۳. بنگرید به مقالهٔ «اسطرلاب» در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۸، تهران، ۱۳۷۷، ص ۲۹۷–۳۰۵ نوشتهٔ محمدعلی مولوی و مقالهٔ «صاغانی» در ابوالقاسم قربانی، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، تهران، ۱۳۷۵، ص ۲۹۲–۲۹۵.

۴. برای مطالعهٔ بیشتر بنگرید به: حسین معصومی همدانی، «آئینهٔ سوزان افلاطون»، نشر دانش، سال هفدهم، ش ۹۵، بهار ۱۳۷۹، ص ۳–۱۵.

مقاطع مخروطی را بیشتر بر پایهٔ علاقه‌شان به ریاضیات محض مطالعه کرده‌اند.

حال برخی از جنبه‌های پیشرفت این نظریه در دورهٔ اسلامی را از طریق مثال ملموسی بیان می‌کنیم. برای درک این مثال ابتدا لازم است برخی مقدمات نظریهٔ باستانی مقاطع مخروطی و انتقال آن به دورهٔ اسلامی به‌اجمال بیان شود.

کتاب پایه در مورد نظریهٔ باستانی مقاطع مخروطی، مخروطات آپولونیوس (در حدود ۲۰۰ قبل از میلاد) است.[1] این کتاب از هشت مقاله تشکیل شده که هفت مقالهٔ نخست آن در قرن سوم هجری زیر نظر برادران بنوموسی به عربی ترجمه شده است.[2] انجام این ترجمه آسان نبود، اولاً به این دلیل که بنوموسی تنها یک نسخهٔ خطی یونانی و آن هم نامطلوب از کتاب در اختیار داشتند؛ دیگر این‌که در دورهٔ بنوموسی مقاطع مخروطی موضوعی کاملاً فراموش شده بود. در نتیجه کسی نبود که بتواند نظریه را برایشان توضیح دهد. بنوموسی در خواندن نسخهٔ‌خطی یونانی مشکل داشتند. اما مدتی بعد یکی از سه برادر، حسن بن موسی، خودش نظریهٔ مقاطع استوانه به کمک یک صفحه را ابداع کرد. نظر او (که درست هم بود) این بود که این نظریه کمی آسان‌تر از نظریهٔ مقاطع مخروطی و نیز مقدمه‌ای برای آن است. پس از درگذشت حسن، برادر دیگر به نام احمد در سوریه نسخهٔ یونانی دیگری از چهار مقالهٔ اول با شرح اتوکیوس [عسقلانی][3] پیدا کرد. به کمک این دو نسخهٔ خطی و نظریهٔ مقاطع استوانه از برادر درگذشته، دو برادر دیگر، احمد و محمد، سرانجام توانستند متن یونانی مخروطات را بفهمند. آن‌گاه ترجمهٔ چهار مقالهٔ اول را به هلال بن ابی‌هلال حمص و مقاله‌های پنجم تا هفتم را به ثابت بن قره سپردند و دو برادر بازنگری نهایی ترجمه را عهده‌دار شدند.

متن یونانی چهار مقالهٔ نخست مخروطات در یک نسخهٔ خطی بیزانسی به جا مانده اما مقاله‌های پنجم تا هفتم تنها در نسخهٔ عربی مخروطات و به کوشش بنوموسی باقی است. گفتنی است که مقالهٔ پنجم مخروطات یکی از درخشان‌ترین (و نیز دشوارترین) آثار ریاضیات یونانی است.

برای درک ترسیمی از دورهٔ اسلامی که در پی می‌آید باید موارد زیر از نظریهٔ آپولونیوس دربارهٔ هذلولی را دانست. اگر مخروطی مطابق شکل ۱ به صورت یک هذلولی قطع شود (بیان امروزی)، آپولونیوس هر شاخهٔ مقطع را یک هذلولی و هر دو شاخهٔ آن را «دو مقطع متقابل» می‌نامد. او در مقالهٔ اول مخروطات خاصیت زیر را ثابت می‌کند:

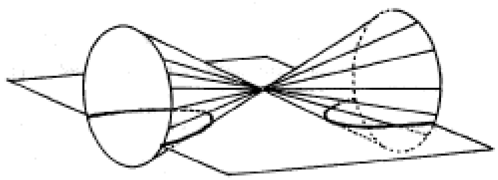
۱. بنگرید به مقالهٔ «آپولونیوس پرگایی» در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۱، تهران، ۱۳۷۴، ص ۸۴، نوشتهٔ محمدعلی مولوی.

۲. تصحیح متن عربی به همراه ترجمهٔ انگلیسی:

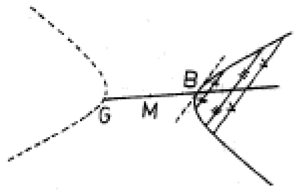
Toomer, G. J., *Apollonius' Conics Books V to VII, The Arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banu Musa*, New York, etc. 1990, 2 vols.

نیز بنگرید به مقالهٔ «بنو موسی» در دانشنامهٔ جهان اسلام، ج ۴، تهران ۱۳۷۷، ص ۴۰۳-۴۰۵، نوشتهٔ محمدجواد ناطق.

۳. Eutocius، بنگرید به مقالهٔ «اوتوکیوس» در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۰، تهران، ۱۳۸۰، ص ۴۱۲، نوشتهٔ محمدعلی مولوی.



شکل ۱



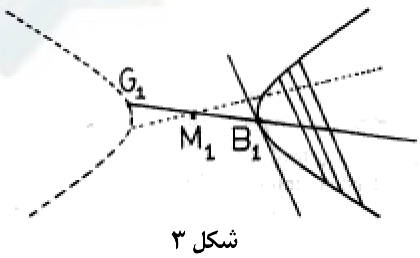
شکل ۲

۱- هر مقطع مخروطی **قطری** دارد، یعنی خطی مستقیم که تمام پاره‌خط‌های مستقیم بین دو نقطه از مخروط را که راستای ثابتی دارند به دو پارهٔ مساوی تقسیم می‌کند (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۷، شکل۲). او این نیمه‌پاره‌خط‌ها را **خطوط ترتیب** مربوط به آن قطر می‌نامد. در شکل ۲، BG قطری است که یک هذلولی را در B و مقطع مقابل (شاخهٔ دیگر) را در G قطع می‌کند.

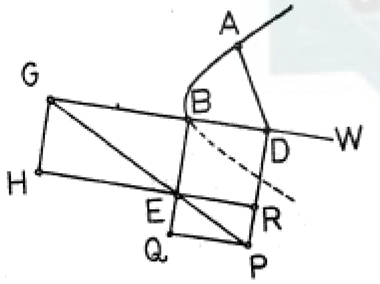
اگر M وسط BG باشد، آپولونیوس با روش‌های مبتنی بر مساحات نشان می‌دهد که:

۲- هذلولی یک مماس در نقطهٔ B دارد و این مماس با خطوط ترتیب قطر GB موازی است (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۱۷ و ۳۲).

۳- هر خط مستقیم که از M عبور کند یک قطر هذلولی است و خطوط ترتیب قطر دلخواه B_1G_1 (شکل۳) همواره موازی با مماس گذرنده از B_1 است (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۴۷).



شکل ۳



شکل ۴

اکنون یک هذلولی به قطر BG در نظر می‌گیریم که مطابق شکل ۴ هذلولی را در B و مقطع مقابل را در G قطع کند. اگر AD یک خط ترتیب دلخواه باشد، آپولونیوس نشان می‌دهد که مستقل از خط ترتیب AD پاره‌خط ثابت BE عمود بر BG وجود دارد چنان که برای تمام خطوط ترتیب AD، مربع AD همان مساحتی را دارد که چهارضلعی $BDPQ$ که به شکل زیر تعریف می‌شود: GE و عمود بر GB در نقطهٔ D را رسم می‌کنیم. اگر P نقطهٔ تقاطع این دو خط و نقطهٔ Q روی BE چنان باشد که $PQ \parallel DB$، آپولونیوس برای قطر اصلی BG در شکل ۲ (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۱۲) و همچنین برای قطرهای دیگر B_1G_1 از شکل ۳ (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۵۰) نشان می‌دهد که $AD^2 = BDPQ$.

اگر قرار دهیم: $AD = y,\ DB = x,\ BG = d,\ BE = p$، آنگاه یک چهارضلعی داریم که در آن:

$$BDRE = BD \cdot BE = x \cdot p,\ \frac{PR}{RE} = \frac{BE}{BG} = \frac{P}{d},\ RE = BD = x$$

در نتیجه:

$$ERPQ = \frac{px^{۲}}{d} \quad \text{و} \quad PR = \frac{px}{d}$$

چنان که خواهیم داشت:

$$y^{۲} = BDPQ = px + \frac{px^{۲}}{d} \qquad -۴$$

این عبارت شبیه معادلهٔ دکارتی هذلولی است اما توجه کنید که دستگاه مختصات عموماً متعامد نیست زیرا AD همواره بر BD عمود نیست. تساوی ۴، وجه تسمیهٔ واژهٔ عربی «قطع زائد» برای هذلولی را بیان می‌کند: آپولونیوس چهارضلعی BDPQ را چنین توصیف می‌کند:

> چهارضلعی ساخته شده بر BE به طول BD و با افزودن چهارضلعی EPRQ که مشابه چهارضلعی ثابت GBEH است.

در رابطهٔ ۴، px چهارضلعی ساخته شده بر $p(=BE)$ به طول $x(=BD)$ و $\frac{px^{۲}}{d}$ افزوده (در عربی: «زائد») است. آپولونیوس معادل رابطهٔ $y^{۲} = px - \frac{px^{۲}}{d}$ را برای بیضی به دست می‌دهد که بیانگر وجه تسمیهٔ «قطع ناقص» در عربی برای آن است (در بیضی $\frac{px^{۲}}{d}$ کاسته می‌شود). برای سهمی نیز داریم $y^{۲} = px$ که در آن نه بخش ناقص و نه بخش زائد داریم. در نتیجه سهمی به عربی قطع «مکافی» یعنی برابر نامیده می‌شود. می‌بینیم که مترجمان عرب اصطلاحاتی را برای واژه‌های یونانی الپسیس[1]، پارابوله[2] و هیپربوله[3] در نظر گرفته‌اند که معنای آن‌ها را نیز حفظ می‌کند و برخلاف مترجمان لاتینی تنها به آوانویسی اصطلاح‌ها اکتفا نکرده‌اند.

برای درک ترسیم زیر از کوهی[4] باید ابتدا این سه اصطلاح را تعریف کرد (شکل۴):

الف– قطعهٔ BG «ضلع مجانب» یا «قطر مجانب» نامیده می‌شود.

ب– قطعهٔ BE «ضلع قائم» نامیده می‌شود.

ج– اگر W نقطهٔ حاصل از امتداد مستقیم خط BD باشد، زاویهٔ ADW «زاویهٔ ترتیب» نامیده می‌شود.

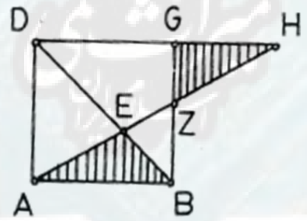
1. elleipsis
2. parabolè
3. hyperbolè

۴. ابوسهل بیژن بن رستم کوهی (د. حدود ۴۰۵ق). دربارهٔ او بنگرید به ابوالقاسم قربانی، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، تهران، ۱۳۷۵، ص ۴۲۱–۴۳۰.

اگر این زاویه قائمه باشد، قطر «محور» نامیده می‌شود.

آپولونیوس همچنین نشان می‌دهد که برای هر دو پاره‌خط متعامد BG و BE و برای هر زاویهٔ a، یک هذلولی وجود دارد که BG قطر مجانب، BE ضلع قائم و a زاویهٔ ترتیب آن باشد. به عبارت دیگر، او قاعدهٔ مدور و رأس مخروطی را می‌سازد که صفحه را به شکل هذلولی مورد نظر قطع می‌کند (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۵۴ و ۵۵).

هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی، نظریهٔ مقاطع مخروطی آپولونیوس را در حل بسیاری از مسائل هندسی به کار می‌بستند. پیش از نیمهٔ قرن چهارم هجری هندسه‌دانان آثاری حاوی چنین اثبات‌هایی نوشته بودند، گرچه همهٔ این اثبات‌ها ریشهٔ باستانی داشتند. از نیمهٔ قرن چهارم هندسه‌دانان ایران و عراق شروع به کشف راه‌حل‌های تازه کردند. نخست مسئلهٔ ترسیم هفت‌ضلعی منتظم بود که به نظر می‌رسد نقش مهمی داشت. هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی متن منسوب به ارشمیدس را می‌شناختند که در آن ترسیم یک هفت‌ضلعی به این مسئله تقلیل داده شده است که مطابق شکل ۵ در مربع معلوم ABGD خط راست AEZH را چنان رسم کنید که مساحت مثلث‌های AEB و GZH برابر باشد. متن هیچ اشاره‌ای به روش کشیدن این خط نمی‌کند، از طرف دیگر این کار با خط‌کش و پرگار ممکن نیست. در نتیجه هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی راه حل منسوب به ارشمیدس را ناقص دانستند.

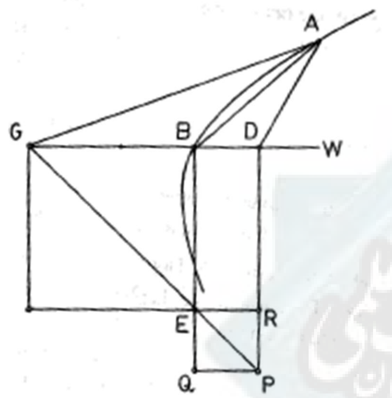


شکل ۵

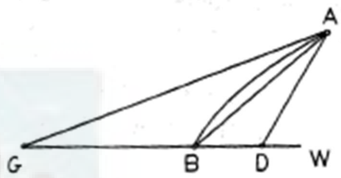
کمی پیش از ۳۵۷ق، هندسه‌دان جوان ابوالجود اعلام کرد که راه حلی برای این مسئله با خط‌کش و پرگار یافته است (البته این کار ناممکن است). سجزی متوجه اشتباه او در این راه حل شد و علاء بن سهل به کمک مقاطع مخروطی آن را تصحیح کرد. تاریخ این راه حل بسیار جذاب است زیرا ظاهراً سجزی اطلاعات ناقصی در مورد راه حل ابوالجود به علاء بن سهل داده بود چنان که علاء بن سهل نمی‌دانست که این راه حل در مورد هفت‌ضلعی است. سپس ابوالجود، سجزی را به سرقت علمی متهم کرد. در این باره در نسخه‌های خطی این دوره ادعاهای جالبی می‌توان یافت. هندسه‌دانان متعددی از جمله صاغانی راه حلی برای رسم خط AEZH ابداع کرده‌اند. در هر حال تاریخ هفت‌ضلعی منتظم به هندسه‌دانان قرن چهارم نشان داد که می‌توان مسائلی را حل کرد که حتی پیشینیان نتوانستند حل کنند. این اندیشهٔ پیشبرد هندسه، انگیزه‌ای برای تحقیق در مسائل دیگر شد. مسئلهٔ کوتاه و زیبای دیگری را که می‌شناسم برایتان مطرح می‌کنم: این مسئله دربارهٔ تثلیث زاویه است که ابوسهل کوهی در حدود ۳۵۷ق آن را کشف کرده (و بعداً سجزی آن را به عنوان یافتهٔ خود آورده) است. متن اصلی کوهی را که بسیار طولانی است عرضه نمی‌کنم

اما خلاصهٔ آن را از نسخهٔ مانیسا (ترکیه) می‌آورم. این خلاصه پیوستی بر بازسازی ابن هیثم (۳۵۴-۴۳۲ق) از مقالهٔ هشتم مخروطات است که از میان رفته است. متن عربی تصحیح شده و ترجمهٔ فارسی آن در پایان این مقاله آمده است.

مسئلهٔ تثلیث زاویه قبلاً در یونان باستان مطالعه و معروف شده بود زیرا نمی‌توان تثلیث زاویه را به کمک خط‌کش و پرگار حل کرد. هندسه‌دانان یونانی راه‌حل‌های متعددی برای آن به کمک وسائل پیچیده‌تر از پرگار یافته بودند. یک راه حل قدیمی با استفاده از مقاطع مخروطی را احمد بن موسی به عربی ترجمه کرد و همان راه حل (یا ترجمهٔ متنی دیگر) توسط ثابت بن قره اصلاح شد. این راه حل از راه حل کوهی که اکنون می‌آورم پیچیده‌تر است.



شکل ۷



شکل ۶

فرض می‌کنیم زاویهٔ داده شده $\angle ADW = a$ است. کوهی ابتدا قطعهٔ دلخواه GB را انتخاب می‌کند (شکل ۶، مطابق نسخهٔ خطی). سپس هذلولی گذرنده از B را چنان می‌کشد که قطر مجانبش GB و ضلع قائمش پاره‌خطی مساوی با GB (BE در شکل ۷) و زاویهٔ ترتیبش زاویهٔ a باشد. آپولونیوس وجود چنین هذلولی‌ای را اثبات کرده است. سپس نقطهٔ A را روی هذلولی به شکلی تعیین می‌کند که AB=BG (A را می‌توان به عنوان نقطهٔ تقاطع هذلولی و دایره‌ای به مرکز B و شعاع BG یافت). بنابراین او خط ترتیب AD را رسم و نقطهٔ A را به G و B وصل و ادعا می‌کند که $\angle DAB = \frac{a}{3}$. اثبات او به صورت زیر است:

او ابتدا می‌گوید: $\frac{GD\cdot DB}{AD^2} = \frac{d}{p}$ که $d = BG$ قطر مجانب و $p = BE$ ضلع قائم است. این رابطه نتیجهٔ این واقعیت است که $AD^2 =$ چهار ضلعی BDPQ. پس

$$\frac{GD\cdot DB}{BD\cdot PQ} = \frac{GD\cdot DB}{PD\cdot DB} = \frac{GD}{PD} = \frac{GB}{EB} = \frac{d}{p}$$

چنان که آپولونیوس در مخروطات ثابت کرده است. چون $d = p = BG$، پس $GD \cdot DB = AD^2$.

کوهی می‌گوید که مثلث‌های ADB و GDA متشابهند زیرا

$$\frac{AD}{DB} = \frac{GD}{AD} \text{ و } \angle ADB = \angle GDA.$$

چون که مثلث‌ها مشابهند، داریم:

$$\angle G = \angle DAB.$$

چون $AB = BG$

داریم $\angle G = \angle BAG$

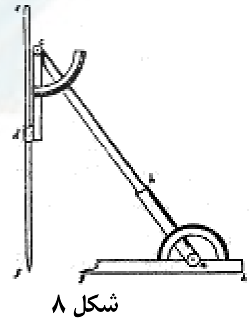
بنابراین $\angle ABD$ (زاویهٔ خارجی) $= \angle G + \angle BAG = ۲\angle G$

پس $\angle ABD = ۲\angle DAB$.

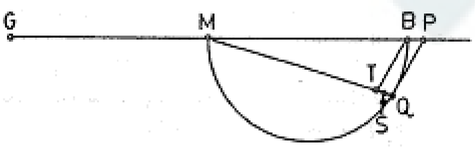
در نهایت اگر W در امتداد BD باشد، داریم:

$\angle ADW$ (زاویهٔ خارجی) $= \angle ABD + \angle DAB = ۳\angle DAB$. پس $\angle DAB = \frac{a}{۳}$.

حال این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان این هذلولی را رسم کرد. کوهی رساله‌ای در باب ترسیم مقاطع مخروطی به کمک پرگار تام نوشته است.[۱] این پرگار مانند پرگار عادی از دو شاخه تشکیل شده است اما با آن دو تفاوت دارد (شکل ۸). نخست آن‌که شاخهٔ اول پرگار تام را می‌توان با زاویهٔ دلخواه $b = \beta$ به صفحهٔ کاغذ ثابت کرد. تفاوت دیگر آن است که شاخهٔ دوم از یک لولهٔ مستقیم و یک قلم تشکیل شده که قلم می‌تواند درون لوله بلغزد به شکلی که انتهای قلم همیشه بر کاغذ باشد. شاخهٔ اول پرگار به محور مخروط مربوط می‌شود و کوهی آن را محور پرگار می‌نامد. شاخهٔ دوم می‌تواند نسبت به محور با زاویهٔ دلخواه $g = \gamma$ ثابت شود. حال اگر شاخهٔ دوم حول محور بچرخد، سطح یک مخروط را ترسیم می‌کند. در نتیجه قلم روی صفحه یک مقطع مخروطی ترسیم می‌کند.



شکل ۸



شکل ۹

کوهی در رساله‌اش در بارهٔ پرگار تام اطلاعات دقیق در مورد رسم هذلولی به کمک این پرگار می‌دهد.[۲]

---

۱. تصحیح متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی

F. Woepcke, « Trois traités arabes sur le compas parfait » , *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibtiothèques*, 22 (1874), pp. 1-175.

چاپ دوباره در

F. Woepcke, *Etudes sur les mathématiques arabo–islamiques*, Frankfurt am Main, 1986 (Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften), vol. 2, pp. 560-734.

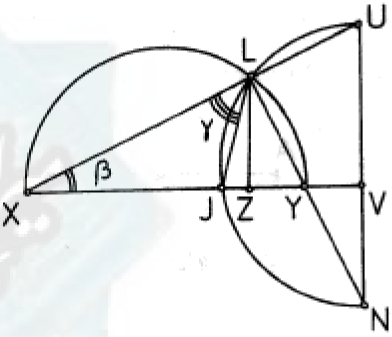
۲. بنگرید به:

F. Woepcke, « Trois traités arabes... » (note l5), pp. 90-99, 129-137 (*Etudes*…, vol. 2, pp. 649, 668, 658-696).

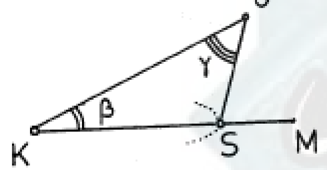
پس می‌دانیم که او چه پاسخی به پرسش طرح شده داده است: چگونه می‌توان هذلولی لازم برای تثلیث زاویه را رسم کرد؟ ابتدا باید محور و رأس هذلولی را یافت (شکل ۹).

M وسط BG است و نیم‌دایره‌ای به قاعدهٔ MB رسم می‌کنیم. سپس مماس دایره، PQ، را که با GB زاویهٔ a می‌سازد می‌کشیم. خط MQ را رسم می‌کنیم و خطی موازی PQ از B عبور می‌دهیم تا MQ را در T قطع کند. در نهایت S را میان T و Q چنان مشخص می‌کنیم که $MS^2 = MT \cdot MQ$. کوهی نشان می‌دهد که S رأس هذلولی و MS محور آن خواهد بود. او می‌افزاید که این روش ترسیم از نقطهٔ S را آپولونیوس پیش‌تر عرضه کرده است (مخروطات، مقالهٔ اول، قضیهٔ ۵۵).

اکنون باید یک هذلولی به مرکز M و رأس S و محور MS و قطر (یا ضلع) مجانب ۲MS و ضلع قائم مساوی با قطر مورب رسم کرد (می‌توان نشان داد که همهٔ اضلاع قائم این هذلولی با ضلع مجانب آن مساوی هستند؛ به همین دلیل این هذلولی متساوی الساقین نامیده می‌شود). ترسیم این هذلولی به قدر کافی پیچیده است. کوهی ابتدا زوایای β و γ در پرگار را در شکلی مقدماتی ترسیم می‌کند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰



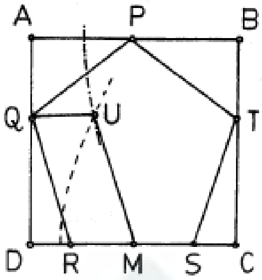
شکل ۱۱

اگر a طول محور پرگار باشد، قرار می‌دهیم $ZY = YV$؛ حالا باید X را روی امتداد ZY به قسمی مشخص کنیم که $\frac{XY \cdot XZ}{XV \cdot VY} = \frac{a^2}{MS^2}$. برای تعیین X کوهی به رساله‌اش به نام قسمة الخطوط علی نسب السطوح ارجاع می‌دهد که امروزه گم شده است.[1] سپس نیم‌دایرهٔ XLY و عمود LZ بر XY را می‌کشد و خط مستقیم UVN را بر KYV عمود می‌کند چنان که XLU و LYN بر هم عمود باشند، در نیم‌دایرهٔ ULN، اگر J نقطهٔ مشترک دایره و XV باشد، کوهی $\gamma = \angle XLJ$ و $\beta = \angle LXJ$ را اختیار می‌کند. حال (شکل ۱۱) پرگار را به شکلی قرار می‌دهد که محور KO در صفحهٔ عمود بر صفحهٔ کاغذ از MS بگذرد و KO با صفحهٔ کاغذ زاویهٔ β بسازد؛ شاخهٔ دوم پرگار با KO زاویهٔ γ می‌سازد. اگر S نقطهٔ برخورد این شاخه با صفحهٔ کاغذ باشد گردش پرگار باعث می‌شود قلم همانطور که کوهی نشان داده است هذلولی مورد نظر را رسم می‌کند.

این ترسیم به قدر کافی پیچیده است. محتمل است که کوهی هرگز زاویه‌ای را به روشی که می‌گوید به

۱. بنگرید به : ابوالقاسم قربانی، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، تهران، ۱۳۷۵، ص ۴۲۳-۴۲۴. — م.

کمک پرگار تام به سه قسمت تقسیم کرده نباشد. او مثل بسیاری از دیگر هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی فقط به هندسهٔ محض به عنوان دانش حقایق ابدی، که به اشکال تغییرناپذیر و قابل درک با قوهٔ خیال و نه به اشکال ترسیم شده روی کاغذ تعلق دارد، علاقمند است. می‌توان متذکر شد که در شکل‌های ترسیم شده در نسخه‌های خطی عربی، مقاطع مخروطی همواره با کمان‌هایی از دایره نشان داده می‌شوند. نسخهٔ مخروطات آپولونیوس، که ابن هیثم آن را استنساخ کرده و در حال حاضر در استانبول است، نیز همین وضع را دارد.



شکل ۱۲

اغلب راه حل‌های مسائل هندسی در دورهٔ اسلامی را که به کمک مقاطع مخروطی انجام می‌شوند می‌توان کاربرد و بسط نظریهٔ آپولونیوس دانست. اما استثنائات خوبی هم مثل محاط کردن پنج‌ضلعی منتظم در یک مربع از کوهی وجود دارد. اثبات او را به سادگی و به کمک اطلاعات زیر می‌توان فهمید. اگر مطابق شکل ۱۲، PQRST پنج‌ضلعی منتظم محاط در مربع ABCD باشد و اگر نقطهٔ P وسط AB و M وسط RS و DC باشد آنگاه نقاط P و M معلوم هستند. کوهی متوازی‌الاضلاع UMRQ و نقطهٔ U را در نظر می‌گیرد. داریم:

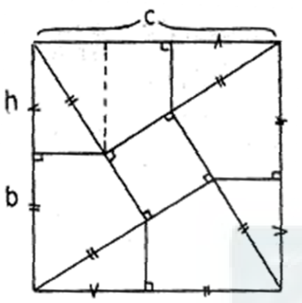
$$PQ = QR = RS = ST = TP = ۲RM = ۲QU = UM$$

چون $UM = ۲QU$، پس U روی هذلولی به کانون M به هادی AD و خروج از مرکزی مساوی ۲ است. از آن‌جا که این مفاهیم در مخروطات آپولونیوس توضیح داده نشده است، کوهی باید رأس، محور و ضلع قائم این هذلولی را معلوم کند. چون $UQ = \frac{۱}{۲}QP$ پس U روی هذلولی دیگری هم واقع است چنان که U را می‌توان به عنوان نقطهٔ تقاطع دو هذلولی معلوم کرد.

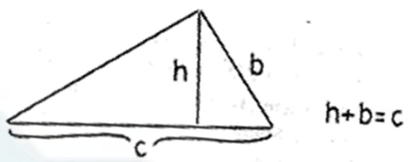
هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی مقاطع مخروطی را برای حل معادلات درجهٔ سوم نیز به کار بسته‌اند[۱]. ماهانی که در حدود ۲۴۶ق زندگی می‌کرد نخستین کسی است که مسئله‌ای هندسی را به معادلهٔ جبری درجهٔ سوم تحویل کرده است که در واقع قضیهٔ کمکی قضیهٔ چهارم از مقالهٔ دوم کتاب کره و استوانهٔ ارشمیدس است. در حوالی سال ۳۲۸ق ابوجعفر خازن معادلهٔ ماهانی را به کمک مقاطع مخروطی حل کرد. ممکن است راه حل ابوجعفر خازن متأثر از شرح اتوکیوس باشد که راه حلی برای مسئلهٔ ارشمیدس به کمک مقاطع مخروطی

۱. غلامحسین مصاحب، حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر، تهران، ۱۳۳۹، ص ۱۲۵.

عرضه کرده است، زیرا می‌دانیم که ابوجعفر خازن این شرح را می‌شناخته است. پس از ابوجعفر خازن اغلب ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی معادله‌های درجهٔ سوم را به کمک مقاطع مخروطی حل کردند. این راه حل‌ها بر خواص سادهٔ مقاطع مخروطی تکیه داشتند. برخی هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی، به‌ویژه کوهی و ابن هیثم، مساحت مقاطع مخروطی و نیز حجم و مرکز ثقل برخی اجسام حاصل از دوران مقاطع مخروطی را مطالعه کرده‌اند. سجزی نیز تحقیقاتی دربارهٔ تقاطع اجسام حاصل از دوران مقاطع مخروطی با صفحه انجام داده است. متن آثار سجزی دربارهٔ اجسام حاصل از دوران و برخی رساله‌های عربی دیگر دربارهٔ مقاطع مخروطی هنوز مورد تحقیق قرار نگرفته‌اند. در نتیجه، دانش تاریخی ما در این موضوع هنوز کامل نیست.



شکل ۱۴



شکل ۱۳

تعداد قابل توجهی از رساله‌های مشخصاً دشوارتر هنوز پیدا نشده است. برای نمونه به گفتهٔ مؤلف ناشناس یک نسخهٔ خطی فارسی متعلق به قرن هفتم هجری[۱]، ابن هیثم رساله‌ای دارد دربارهٔ ترسیم یک مثلث قائم‌الزاویه، با استفاده از یک سهمی و یک هذلولی، که مجموع ارتفاع و کوچکترین ضلع آن با وترش برابر باشد (شکل ۱۳). هیچ نسخه‌ای از این رساله در دست نیست.[۲] مؤلف ناشناس اضافه می‌کند که ابن هیثم متأثر از هندسهٔ عملی بوده زیرا چنین مثلثی برای ترسیم دقیق یک طرح کاشیکاری لازم است (شکل ۱۴) (راه ترسیم این کاشیکاری را با تقریبی عالی به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار می‌دانیم). این رسالهٔ ابن هیثم تنها نمونه از این نوع نیست. هنوز موارد فراوانی برای کشف وجود دارد زیرا سنت مقاطع مخروطی در دورهٔ

۱. این نسخه با عنوان فی تداخل الأشکال المتشابهة أو المتوافقة در کتابخانهٔ ملی پاریس نگهداری می‌شود و محتوای آن در کتاب هندسهٔ ایرانی نوشتهٔ مهندس علیرضا جذبی (انتشارات سروش، چاپ سوم، ۱۳۸۴) عرضه شده است (بنگرید به شکل پایان این مقاله).

۲. نسخهٔ خطی رسالهٔ عربی کوتاهی از عمر خیام در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران (به شمارهٔ ۱۷۵۱/۲) موجود است که حل همین مسئلهٔ هندسی در آن به حل معادلهٔ درجهٔ سومی تحویل شده و خیام آن معادله را به کمک مقاطع مخروطی حل کرده است. تصویر این نسخهٔ خطی و متن ویراسته و ترجمهٔ فارسی آن را غلامحسین مصاحب در کتاب حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر (ص ۲۵۲–۲۶۱) آورده است. مرحوم آلپای ازدورال، پژوهشگر اهل ترکیه، رابطهٔ طرح کاشیکاری فوق در نسخهٔ پاریس با رسالهٔ کوتاه عمر خیام را در مقالهٔ زیر بیان کرده است:

Alpay Özdural, “On Interlocking Similar or Corresponding Figures and Ornamental Paterns of Cubic Equations”, *Muqarnas*, vol. XIII: An Annual on the Visual Culture of the Islamic World, ed. Gülru Necipoglu, Leiden: E. J. Brill, 1996, pp. 191-211.

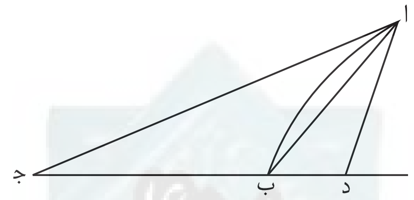
نیز بنگرید به: یان پ. هوخندایک، «پژوهش‌های اخیر پیرامون تاریخ ریاضیات و نجوم در تمدن اسلامی (قرن‌های دوم تا نهم هجری)»، ترجمهٔ محمد باقری، نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، شهریور ۱۳۷۷، ص ۴۳–۵۲.

اسلامی بسیار غنی بوده است.

متن روش کوهی

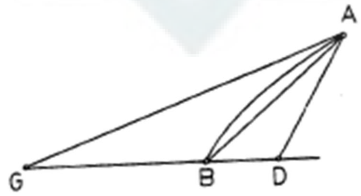
إذا أردنا أن نأخذ من زاوية معلومة ثُلثها وضعنا قطعاً زائداً ضلعه القائم مثل قطره المجانب وزاوية ترتيبه مثل الزاوية المعلومة. وليكن قطع اب وقطره المجانب بج ونخطُ فی القطع خطاً مثل خط بج وهو خطُ با ونخرج خط اد علی الترتیب. فأقول إن زاوية داب الزاوية المطلوبة[1].

برهانه: إن نسبة ضرب جد فی دب إلی مربع خط اد کنسبة المجانب إلی القائم والمجانب فرضناه مثل القائم فضرب جد فی دب مثل مربع اد فیکون لذلک مثلث ادب شبيها بمثلث ادج فزاوية داب مساوية لزاوية ج وزاوية ابد مثلا زاوية ج لأن اب مثل بج فزاوية ابد مثلا زاوية داب. ولأن الزاوية الخارجة من[2] کل مثلث مثل الداخلتين المتقابلتين[3] لها تکون لذلک زاوية داب ثلث الزاوية المفروضة. وذلک ما أردنا أن نبين.



ترجمه

اگر یک سوم زاویهٔ معلومی را بخواهیم، هذلولی‌ای می‌کشیم که ضلع قائمش با قطر مجانبش و زاویهٔ ترتیبش با آن زاویهٔ معلوم برابر باشد (شکل ۱۵). آن قطع مخروطی AB و قطر مجانبش BG است. در این مقطع مخروطی خطی برابر با خط BG رسم می‌کنیم، که خط BA باشد و خط ترتیب AD را می‌کشیم. می‌گویم که زاویهٔ DAB همان زاویهٔ مطلوب است.



شکل ۱۵

اثبات: نسبت حاصل ضرب GD در DB به مربع خط AD با نسبت ضلع مجانب به ضلع قائم برابر است. اما ضلع مجانب را مساوی با ضلع قائم فرض کردیم. پس حاصل ضرب GD در DB با مربع AD برابر است. بر این اساس، مثلث ADB با مثلث ADG متشابه است. پس زاویهٔ DAB مساوی با زاویهٔ G و زاویهٔ

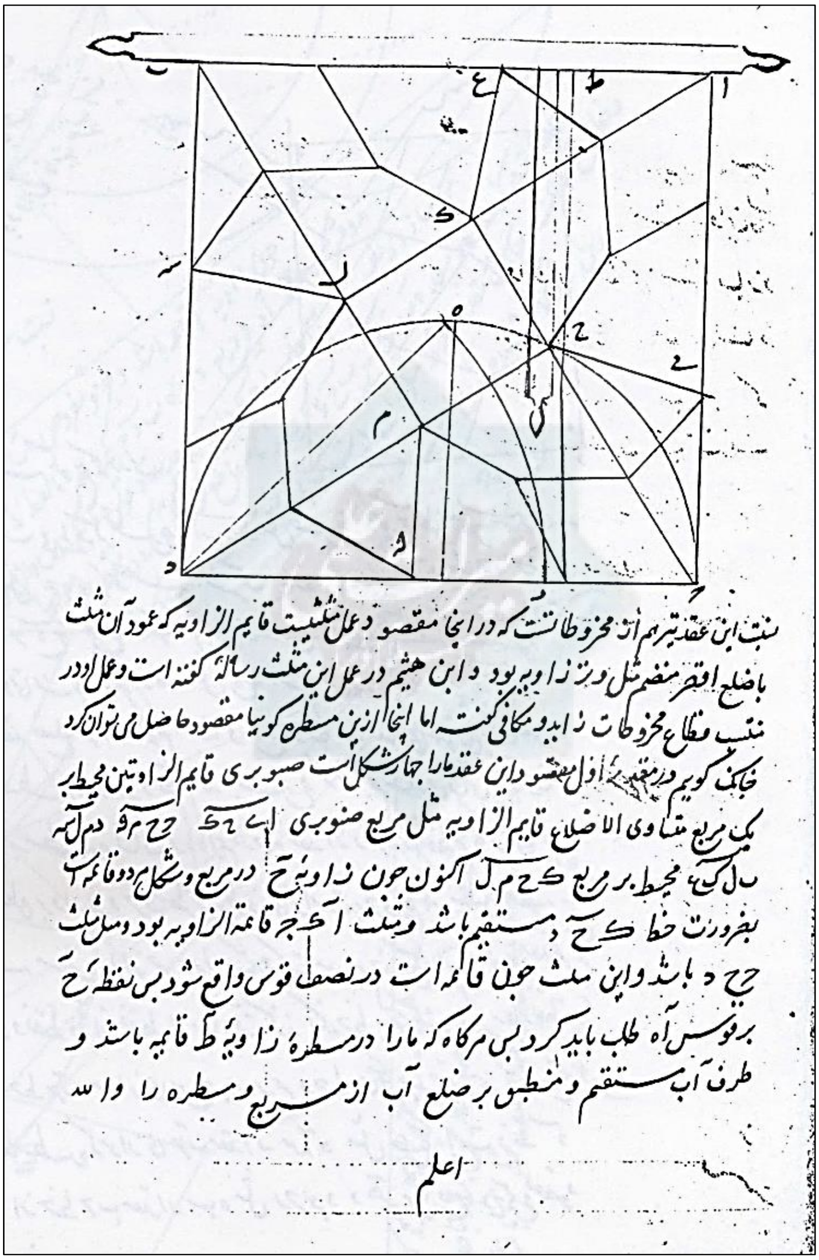
---

۱. در نسخه: المعلومة

۲. در نسخه: الخارجتين

۳. در نسخه: مثلا الداخلين المقابلين

ABD دو برابر زاویهٔ G است، زیرا AB با BG برابر است. پس زاویهٔ ABD دو برابر زاویهٔ DAB است. از آن‌جا که زاویهٔ خارجی هر مثلث با (مجموع) زاویه‌های داخلی مقابل به آن برابر است، بنابراین زاویهٔ DAB یک سوم زاویهٔ معلوم است. این همان بود که می‌خواستیم نشان دهیم.


نسبت این عقد تیرهم از مخروطات است که در اینجا مقصود عمل مثلثیت قایم الزاویه که عمود آن مثلث
با ضلع اقصر منضم مثل وتر زاویه بود و ابن هیثم در عمل این مثلث رسالهٔ گفته است و عمل او در
منتسب مقاطع مخروطات زاید و مکانی گفته اما اینجا از این مسطره گونیا مقصود حاصل می توان کرد
چنانک گوییم در مقدمه اول مقصود در این عقد ما را چهار شکل است صنوبری قایم الزاویتین محیط بر
یک مربع متساوی الاضلاع قایم الزاویه مثل مربع صنوبری ا ب ح ک ح ح م و دم ل ب
م ل ک ب محیط بر مربع ک ح م ل اکنون چون زاویهٔ ح در مربع و شکل بر دو قائمه است
بضرورت خط ک ح د مستقیم باشد و مثلث ا ح ج قائمة الزاویه بود و مثل مثلث
ح ج د باشد و این مثلث چون قائمه است در نصف قوس واقع شود پس نقطهٔ ح
بر قوس ا ه طلب باید کرد پس هرگاه که ما را در مسطره زاویهٔ ط قایمه باشد و
طرف ا ب مستقیم و منطبق بر ضلع ا ب از مربع و مسطره را والله
اعلم

تصویر صفحه‌ای از رسالهٔ فی تداخل الأشکال المتشابهة او المتوافقة که ترسیم کاشیکاری مورد نظر در آن آمده است. نسخهٔ خطی کتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ MS Persan 169، برگ ۱۹۱ر.

پیوست

متن عربی مقاله‌های اول تا چهارم مخروطات (که به یونانی نیز باقی مانده) اخیراً در مجموعهٔ زیر چاپ شده است:

R. Rashed, ed., *Apollonius de Perge, Coniques*, Berlin-New York, Walter de Gruyter and Co., 2008-2010 ،7 vols.

کلیهٔ متون اسلامی دربارهٔ هفت‌ضلعی منتظم در کتاب زیر چاپ شده است:

R. Rashed, ed., *Les Mathématiques Infinitésimales*, vol. 3, Ibn al-Haytham, Théorie des Coniques, Constructions Géométriques et Géométrie Pratique, London, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1421/2000, pp. 647-898.

خاصیت نظری هذلولی که می‌تواند به صورت «قانون اسنل» در شکست نور تعبیر شود در متنی دربارهٔ ابزارهای سوزان (محرقات) از ابن سهل بحث شده است، برای متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی بنگرید به:

R. Rashed, ed., *Géométrie et Dioptrique au Xe Siècle*, Paris: Les Belles Lettres, 1993, pp. 1-5;

برای متن عربی و ترجمهٔ انگلیسی بنگرید به:

R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1426/2005, pp. 76-143;

بحث جالبی دربارهٔ مماس مقاطع مخروطی در منبع زیر آمده است:

J. L. Berggren,"Al-Kūhī's 'Filling a Lacuna in Book II of Archimedes' *On the Sphere and Cylinder* in the Version of Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī", *Centaurus*, 38 (1996), 140- 207;

برخی از متون جالب دربارهٔ سنت اسلامی مقاطع مخروطی که پس از انتشار مقاله در سال ۱۹۹۸ به چاپ رسیده‌اند:

ابوسهل کوهی، کتاب مرکز الدوائر المتماسّة علی الخطوط بطریق التحلیل، در

Abū Sahl Kūhī, *"The Book on Centers of Tangent Circles on Lines by Way of Analysis* (kitāb marākiz al-dawāʾir al-mutamāssa ʿalā al-khuṭūṭ bi-ṭarīq al-taḥlīl)", in A. Abgrall, *Le développement de la géométrie aux IXe-XIe siècles: Abū Sahl al-Qūhī*, Paris 2004, pp. 196-217;

ابوسعید سجزی، فی خواصّ القبّة الزائدة والمکافیة، در

Abū Saʿīd al-Sijzī, "On the properties of the hyperbolic dome and the parabolic dome (fī khawāṣṣ al-qubba al-zāʾida wa'l-mukāfiya)" in R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1426/2005, pp. 592-609;

ابوسعید سجزی، فی خواصّ المجسّم الناقص والزائد والمکافئ، همان، ص ۶۱۰–۶۲۷.