میراث ریاضی مصر باستان*

بئاتریس لامپکین[1]
ترجمهٔ بهناز فتاحی

درسال ۱۹۶۸ که در مدرسهٔ مالکم ایکس در شهر شیکاگو ریاضیات تدریس می‌کردم، شاگردانم از من خواستند اطلاعاتی در بارهٔ میراث علمی آفریقاییان در اختیارشان بگذارم. با این کار موافق بودم، ولی در کتاب‌های درسی هیچ مطلبی در این باره نیافتم تا به تدریسم در کلاس کمک کند. همچنین، گرچه در رشتهٔ تاریخ هم تحصیلاتی داشتم، در مورد سهم آفریقاییان یا آمریکاییان آفریقایی‌تبار در ایجاد تمدن جدید چیزی نخوانده بودم و طبعا نمی‌توانستم دربارهٔ آنچه نمی‌دانم به دیگران اطلاعاتی بدهم. چون شاگردان سیاه‌پوست من تا حدی با تمدن مصر باستان احساس نزدیکی می‌کردند بر آن شدم تا جستجوهایم را با بررسی ریاضیات آن تمدن کهن آغاز کنم.

من دریافتم تقریباً هر کتابی دربارهٔ تاریخ ریاضیات با مطالبی از مصر باستان آغاز می‌شود. ولی از عبارات تحقیرآمیزی که در بسیاری از آنها می‌دیدم دستخوش حیرت شدم. مثلاً یکی می‌نویسد: «علم باستانی حاصل کار عده‌ای انگشت‌شمار بوده است، و در میان این عدهٔ قلیل، از مصریان کسی یافت نمی‌شود»[2]. یا موریس کلاین[3] می‌گوید: «ریاضیات مصر و بابل در برابر ادبیات عظیم یونانی در حکم مشق‌های خط خطی نوآموزان دبستانی است.» یا ف. کاژری[4] می‌نویسد: «در عصر ظلمت، نژادی سامی نگهداری ثروت معنوی آریاییان را بر عهده داشت.» که منظورش پیشبرد ریاضیات به وسیلهٔ مسلمانان است.

---

* این مقاله را مؤلف برای مجلهٔ میراث علمی فرستاده است.

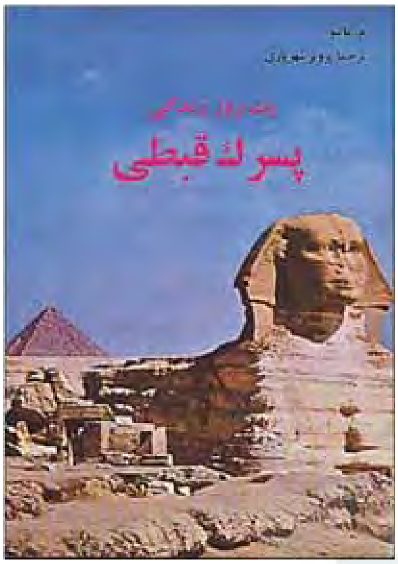
[1] Beatrice Lumpkin

خانم لامپکین دانشیار ریاضیات در کالج مالکوم ایکس (Malcolm X College) در شیکاگو بود و برای تشویق دانش‌آموزان به مطالعهٔ ریاضیات، از دستاوردهای آفریقایی‌ها، آسیایی‌ها و آمریکایی‌ها در پیشرفت ریاضیات استفاده کرد. او پس از بازنشستگی از کالج مالکوم ایکس در مدرسه‌های عمومی شیکاگو تدریس می‌کرد و متون درسی چندفرهنگی را برای نظام آموزشی پورتلند، اورگون، شیکاگو و میلواکی تهیه کرد. وی کتابی با عنوان سِنِه فِر: نابغه‌ای جوان در مصر باستان برای کودکان نوشت که موضوع آن عددنویسی هیروگلیف در مصر باستان است. این کتاب به دست خانم پروانه عروجنیا ترجمه شد و در سال ۱۳۸۳ توسط انتشارات علمی و فرهنگی منتشر گردید (چاپ دوم ۱۳۸۶).

[2] اوتو نویگه باور، علوم دقیق در عهد عتیق، ترجمهٔ همایون صنعتی‌زاده، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۷۵، ص۱۲۳.

[3] Moris Kline

[4] F. Kajori



سرانجام دریافتم شکایت دانشجویانم در مورد وجود تعصب در مواد درسی برحق است. تاریخ ریاضیات تنها مورد خاصی از نادیده گرفتن دستاوردهای آفریقاست. آلیسن بروکز[5] که در آفریقای مرکزی اکتشافات مهمی کرده است، در مجلهٔ علم[6] می‌نویسد: «خیلی‌ها نمی‌خواهند هیچ اکتشاف معینی را به آفریقا نسبت دهند.» در آن زمان هنوز کتاب آگاهی بخش و بسیار معتبر ریچارد جیلینگز[7] به نام ریاضیات در عصر فراعنه منتشر نشده بود.

باید گفت، با اینکه برده داری در آمریکا پایان گرفت اما تعصب نژادی با آغاز دوران تازه‌ای از استعمارگری در آسیا، آفریقا و آمریکای لاتین ادامه یافت. نژادپرستی در ایالات متحده با ایجاد فاصلهٔ عمیقی میان دستمزدها اساس اقتصادی پیدا کرد. آنچه را که محققان اروپایی و پیروان آمریکاییشان «دانش آریایی» می‌نامند فنیقیه، اسرائیل و بابل را هم (به استثنای «دولت منفور» عراق) شامل می‌شود! جمعی هم اصطلاح «اروپامحوری» را مطرح کردند که مدت‌ها بعد موجب پیدایش اصطلاح «آفریقامحوری» در برابر آن شد.[8]

بسیاری از نویسندگان، از جمله مورخ برجستهٔ ریاضیات یونانی و اسکندرانی سر توماس هیت، شواهد زیادی دربارهٔ تأثیر مصر بر ریاضیات یونانی عرضه کرده‌اند. ولی در حال حاضر قصد ما بررسی عناصر علمی در ریاضیات مصر باستان است که یونانیان از آن چیزهای فراوانی آموختند.[9]

عددهای مصری

ریاضیات مصری با نوشتن عدد آغاز شد. در آن هنگام عددنویسی مصری موضعی یا جاارز نبود. این نوع عددنویسی نشان نمی‌دهد مصریان چه نقشی در تکامل عددنویسی داشتند. روش پیکربندی توسط مصریان دستاورد مهمی در تکامل عددنویسی بود و از بسیاری جهات اهمیت آن با ابداع ارزش موضعی بابلیان برابری می‌کرد.

شکل ۱: ارقام بابلی برای ۴۷ و ۱۶۷

ارزش موضعی اول بار به دست بابلیان براساس دستگاه

---

[5] Alison Brooks
[6] *Science*
[7] R. Gillings

[8] جورج گورگیس یوسف، کاکل طاووس، ترجمهٔ غلامحسین صدری‌افشار، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۵، ص۱۲.

[9] کتاب ارزشمند و خواندنی یک روز زندگی پسرک قبطی اثر م. ماتیو، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات توکا، ۱۳۵۵ هم روایتی خواندنی از این مبحث در قالب داستان برای نوجوانان است. این کتاب در سال ۱۳۵۵ برندهٔ جایزهٔ شورای کتاب کودک شد.

شصتگانی به وجود آمد و پیامد مهمش گسترش آن به کسرهای شصتگانی بود. آنان برای عددهای ۱ تـا ۵۹ پیکربندی به کار نمی‌بردند. برای یکان خط‌های عمودی و برای ۱۰ خط خمیده‌ای به ایـن شـکل < با قلم نی بر روی گل رسم می‌کردند و این کار را تـا رسـیدن بـه عـدد مـورد نظرشـان ادامـه می‌دادنـد. ارزش‌های موضعی یا مرتبهٔ اعداد عبارت بود از توان‌های متوالی ۶۰: ۶۰°، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳ تا آخر. مثلاً ۴۷ را مانند شکل سمت چپ به صورت ۴ تا ۱۰ و ۷ تا ۱ در پایهٔ یکان می‌نوشتند و ۱۶۷ راماننـد شـکل سمت راست، یعنی ۲ تا ۶۰ همراه با همان علامت‌هـای۴۷. هرمرتبـه بـا فاصـله‌ای از مرتبـهٔ قبلـی جـدا می‌شد. هنوز صفر هندی برای نمایش جای خالی ابداع نشده بود.

نوشتن و خواندن اعداد بسیار دشوار بود، چون باید تا رسیدن بـه عـدد مـورد نظـر ادامـه می‌یافـت و علامت‌ها تکرار می‌شد. پیکربندی این کار را تسهیل کرد. ارقام معینی جانشین کمیت‌های مورد نظر شـد و هر عدد نماد خاصی یافت. خط هیروگلیف مصری گامی به سوی پیکربندی بود. چون برای هـر مرتبـهٔ دهدهی نشانهٔ معینی به کار می‌برد، مانند ۱۰۱ تا ۱۰۶ (عددنویسی مصری بر پایهٔ دهدهی بود). این نمادها گروه‌بندی و تکرار می‌شد تا عدد مورد نظر را نمایش دهد. مثلاً برای نمایش ۲۰۳۴ دو نشانهٔ ۱۰۰۰، سـه نشانهٔ ۱۰ و چهار نشانهٔ ۱ به کار می‌رفت.

بیشتر پاپیروس‌های به دست آمده از مصر باستان به خط هیروگلیف شکسته نوشـته شـده اسـت کـه امروزه به آن هیراتیک[۱۰] می‌گویند. هیروگلیف برای نوشتن کتیبه‌ها و اسناد رسمی‌تر به کار می‌رفت. ولی عددنویسی هیراتیک خیلی فراتر از هیروگلیف شکسته بود و در آن دیگر نشانه‌هایی شبیه چوب‌خط دیـده نمی‌شد، بلکه پیکربندی کاملی برای یکان، دهگان، صدگان و بقیه وجود داشت و بـه سـبک عددنویسـی قدیم هر مرتبه با علامتی از مرتبهٔ قبلی جدا می‌شد.

نمونهٔ زیر عدد ۱۹۶۰۷ را در عددنویسی هیروگلیف و هیراتیک نشـان می‌دهـد. عـددهای مصـری از راست به چپ خوانده می‌شود.

هیروگلیف

۱۹،۶۰۷ = ۱ × ۷ ؛ ۶×۱۰۰ ؛ ۱،۰۰۰ × ۹ ؛ ۱×۱۰×۱۰،۰۰۰

هیراتیک

۷ ؛ ۶۰۰؛ ۹،۰۰۰؛۱۰،۰۰۰ برابر با ۱۹،۶۰۷

عددنویسی بابلی ۱۹،۶۰۷ (۱×۴۷ + ۶۰× ۲۶ + ۵×۳،۶۰۰)

| | | < < | | | < < | | | |
| | | | | < < | | |

شکل۲: نمایش عدد ۱۹،۶۰۷ در عددنویسی هیروگلیف، هیراتیک و بابلی.

[10] Hieratic

چنان که دیده می‌شود، روش پیکربندی مصری قابل مقایسه است با روش بین‌النهرین که از یـک شیوهٔ منطقی ارزش موضعی دهدهی برخوردار است که نوشتن و خواندن اعداد را آسان می‌کند. به علاوه، پاپیروس و قلم موی انعطاف پذیر مصری کار نوشتن را بسیار آسانتر از قلم نی بر روی لوحهٔ گلی امکـان پذیر می‌ساخت. این پاپیروس‌ها بسیار ظریفتر و به آسانی قابل حمل و در عین حال آسیب پذیرتر بودنـد؛ به طوری که در دوره‌های بعدی به عنوان سوخت به کار رفتنـد. بـر خـلاف بـین النهـرین، کـه در آنجـا میلیون‌ها لوحهٔ گلی به دست آمده و اطلاعات خوبی دربارهٔ تاریخ آن سرزمین عرضه کرده است، به علـت از میان رفتن پاپیروس‌ها اطلاعات کمی دربارهٔ فرهنگ مصر به دست ما رسیده است.

جالب است بدانیم در اعداد آتنی قدیم، که از حدود ۵۰۰ پیش از میلاد به دست آمده همـان اصـول هیروگلیف مصری به کار رفته است. بعدها اعداد آتنی راه را برای پیدایش اعداد یونیه‌ای هموار ساخت.

کسرهای مصری

غیر از کسر $\frac{2}{3}$ که کاربرد همگانی داشت تنهـا کسـرهای دارای صـورت واحـد در مصـر باسـتان بـه کـار می‌رفت. مثلاً $\frac{3}{4}$ را به صورت $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ می‌نوشتند. ما امروز ترجیح می‌دهیم کسر اعشاری به کار بریم. ولـی در آن زمان پیدایش کسرهای واحد پیشرفت بزرگی به شمار می‌رفت که راه را برای دقت در اندازه‌گیـری و نشان دادن حاصل عمل تقسیم هموار ساخت. کاتبان مصری قادر بودند هر محاسبه‌ای را عملاً با دقت زیاد انجام دهند. ۱۵۰۰ سال بعد، منجمان در اسکندریه برای محاسبه از روش شصتگانی بـابلی اسـتفاده می‌کردند، ولی نتایج را با کسرهای واحد نشان می‌دادند.

کاتبان مصری حق داشتند به خاطر انجام دادن محاسبات پیچیده با کسر بر خود ببالند. مسئلهٔ ۳۳ در پاپیروس احمس[11] دربارهٔ کمیتی است که وقتی $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{7}$ آن را با هم جمع کنیم ۳۷ می‌شـود. جـواب مسئله نمونهٔ جالبی از مهارت کاتب است. او جواب $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$ را بـا $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{7}$ جـواب جمـع کرد و جواب ۳۷ را به دست آورد.

$\frac{2}{3}$ جواب $(16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776})$ برابر با $10+\frac{2}{3}+\frac{1}{84}+\frac{1}{1358}+\frac{1}{4074}+\frac{1}{1164}$ به دست می‌آید.

$\frac{1}{2}$ جواب می‌شود $8+\frac{1}{112}+\frac{1}{1358}+\frac{1}{1552}$.

$\frac{1}{7}$ جواب می‌شود $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{392}+\frac{1}{4753}+\frac{1}{5432}$.

اینک هر خواننده‌ای که محاسبه را تکرار کند نسبت به کاتب احسـاس تحسـین و احتـرام خواهـد کرد. وجود جدول‌هایی از کسـرها در عمـل کـار را تسـهیل می‌کـرد. مصـریان بـه یـاری مفهـوم کسـر یادمان‌های عظیم خود را با چنان دقت حیرت‌انگیزی ساختند که تا چندین هزار سال همانندی نداشتند.

[11] Ahmos

وقتی گفته می‌شود مصریان وسیله‌ای برای نوشتن کسر به صورت $\frac{p}{q}$ نداشتند، برخی تصور می‌کنند این بدان معنی است که مصریان قادر به محاسبه با کسرهای متعارفی نبودند. وقتی به مقیاس $\frac{۱۳}{۱۶}$ انگشت از یک گز بر می‌خوریم (انگشت برابر طول یک بند انگشت و گز[۱۲] برابر ۷ کف دست و هرکف برابر۴ انگشت بود) مایهٔ شگفتی می‌شود که آنان این مقیاس کوچک را چگونه محاسبه می‌کردند. این مقیاس اندازه گیری با «چوب ذرع» با تقسیم بندی $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$ تا $\frac{۱}{۱۶}$ انگشت اینک در موزهٔ لوور نگهداری می‌شود. به نظر می‌رسد آنان می‌دانستند $۱۳ = ۸ + ۴ + ۱$ و در نتیجه $\frac{۱۳}{۱۶}$ برابر $\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}$ است و با شمردن ۳ جزء از انتهای «چوب ذرع» به آن می‌رسیدند.

معلوم نیست کسرهای واحد چگونه چنین مدت درازی دوام آوردند. درست است که محاسبات نجومی در اسکندریه با کسرهای شصتگانی انجام می‌گرفت، ولی این ۱۵۰۰ سال بعد بود. با این حال هرون اسکندرانی در حوالی سال ۱۰۰ میلادی، در نوشتن برای عامه، کسرهای واحد را ترجیح می‌داد. روش مصری محاسبه بر اساس کسرهای واحد دست کم تا۱۰۰۰ سال بعد از هرون در اروپا ادامه یافت. تا زمان تألیف کتاب حساب فیبوناچی در سال ۱۲۰۲ میلادی، جدول‌هایی برای تبدیل کسرهای متعارفی به کسرهای واحد تنظیم می‌شد. ظاهراً فیبوناچی به کسر واحد علاقمند بود، یا فکر می‌کرد خوانندگان کتابش به آن علاقه دارند.

کاتبان مصری سعی می‌کردند مناسبترین روش‌های تبدیل کسرهای متعارفی به کسرهای واحد را پیدا کنند. مثلاً یک اتحاد پرکاربرد $\frac{۱}{۶n}+\frac{۱}{۳n}=\frac{۱}{۲n}$ بود. در واقع ریاضیات مصری به سطح بسیار بالایی از پیچیدگی دست یافته بود.

روزآمد کردن: نمادها و صفر مصری

مصریان قادر بودند مسئله‌های مربوط به تناسب مستقیم و تناسب معکوس را حل کنند؛ جذر عددهای معینی را به‌دست آورند؛ میانگین همساز دو عدد را بشناسند؛ معادلهٔ خطی درجهٔ اول و دستگاه شامل دو معادله را، که یکی از درجهٔ دوم باشد، حل کنند؛ مجموع جملات تصاعدهای عددی و هندسی را بیابند؛ مساحت دایره و سطح استوانه (شاید حتی کره) را محاسبه کنند؛ حجم هرم ناقص و سیلوهای استوانه‌شکل را تعیین کنند؛ و در توصیف شیب هرم‌ها تابع‌های مثلثاتی خامی را به کار برند.

پاپیروس احمس آغاز بهره‌گیری از نمادها را نشان می‌دهد. مصریان برای کمیت مجهول واژه‌ای به معنی «کپه» را به کار می‌بردند که به همان فراوانی واژهٔ «کوزا[۱۳]» (به معنی «چیز») در ایتالیای سده‌های ۱۵ و ۱۶ در آثار مصری رواج داشت. برای جمع و تفریق هم نشانه‌هایی داشتند. علامت جمع یک جفت

[12] cubit
[13] cosa

پا بود که از عددی به سوی عدد دیگر در حال رفتن بود و برای تفریق آن پاها در سمت بازگشت از آن عدد بودند.

درست است که در دستگاه محاسباتی مصریان نماد صفر برای مرتبهٔ خالی دیده نمی‌شود، ولی صفر را دست کم برای دو مورد به کار برده‌اند. یکی در محل بناهای سلطنت قدیم است که در آن علامت هیروگلیف « ن ف ر» به جای صفر نوشته شده است. ردیف‌های بالاتر از سطح زمین با ۱ گز بالای صفر، ۲ گز بالای صفر مشخص شده است و ردیف‌های پایین تر از سطح زمین با نشانه‌های زیر صفر. خود صفر با علامت هیروگلیفی مثلث‌شکل «ن ف ر» نشان داده شده است. این بهره گیری بسیار کهن از مفهوم عددهای جهتدار، که در آنها بالا و پایین کمیت مثبت و منفی دارد، شایان تأمل است.

همین نماد «ن ف ر» برای بیان باقی ماندهٔ صفر در یک صورت حساب ماهانهٔ مربوط به عصر سلطنت میانه از حوالی ۱۷۰۰ سال پیش از میلاد دیده می‌شود. این ورقه یک صورت حساب دو ستونی است که در هر ستون کالاهای گرفته شده یا داده شده و بهایشان ثبت و در پایین حساب‌ها تراز شده است و باقیماندهٔ حساب صفر است که با نماد «ن ف ر» نشان داده شده است. بدین ترتیب دیده می‌شود که مصریان نماد صفر را دست کم در بیش از یک مورد به کار برده‌اند. ولی این نماد تا کنون در پاپیروس‌های ریاضی به جای مانده از مصر باستان دیده نشده است.

در یک سند به دست آمده از ادفو[۱۴] مربوط به ۱۵۰۰ سال پس از احمس، برای به دست آوردن مساحت چهارضلعی‌ها، حاصل ضرب میانگین عددی ضلع‌های روبرو توصیه می‌شود و برای مساحت مثلث نصف مجموع دو ضلع ضرب در نصف ضلع سوم، که البته دقیق نیست. این تلاش جالبی است برای یافتن رابطه ای میان شکل‌های هندسی، همچنین استفاده از مفهوم صفر به عنوان کمیتی هندسی.[۱۵]

تناسب

برخی دستاوردهای مصر باستان تنها از طریق بناها و آثار هنری شناخته شده است، نه از متن‌های ریاضی. زیرا بهره گیری از ریاضیات به متن‌های مکتوب منحصر نشده است و با بررسی ساخته‌های مصری استعداد ریاضی مصریان، از جمله افراد بیسواد، آشکار می‌شود.

منابع مصری شناخت مفهوم تناسب را در حد بالایی نشان می‌دهند. در اثرهای هنری اصول تناسب درنقاشی و پیکرسازی بدن انسان به کار رفته است. برای بزرگ کردن تصویر، خانه‌بندی در مقیاس لازم به کار گرفته شده است. استدلال تناسبی برای حل مسئله‌هایی به روش آزمون و خطا زیاد کاربرد داشته است. از روش آزمون و خطا تا سدهٔ ۱۲ میلادی استفاده می‌شد. احمس آن را در مسئله‌های ۲۴–۲۹،

[۱۴] Edfu شهری در ناحیهٔ اسوان مصر، دارای معبدی از دوران بطلمیوس اول.
[۱۵] در اینجا مثلث یک چهارضلعی فرض شده که طول ضلع چهارم آن صفر است.

۳۵–۳۸، ۴۰ و ۷۶ به کار برده است.

احمس مسئلهٔ ۷۶ را مانند مسئله‌های ۷۳ و ۷۶ با یک تناسب ساده حل کرده است. ممکن است کاتب به منظور آموزش، تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در مسئلهٔ ۷۲ برای به دست آوردن $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ و $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ گسترش داده باشد.

در عین حال که کاتب از تناسب همساز بهره گرفته، در دام مسئله‌هایی از نوع زیر که صورت امروزی همان مسئلهٔ ۷۶ احمس است، نیفتاده است.

راننده‌ای یک مسافت ۱۰ کیلومتری را با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت می‌رود و با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت برمی‌گردد. سرعت میانگین او در یک دور رفت و برگشت چقدر است؟

پاسخ آن۲۴ و نه ۲۵ کیلومتر در ساعت است. چون سرعت رفت کمتر از سرعت برگشت است، برای رفتن زمان بیشتری صرف می‌شود.

مسئلهٔ معادل آن در پاپیروس احمس مربوط به تبدیل نان‌هایی با بهای متفاوت است.

اگر از یک پیمانه گندم ۱۰ نان حاصل شود، هر نان را یک‌دهمی می‌نامیم که بهایش دو برابر نان یک‌بیستمی است (از یک پیمانه گندم ۲۰ نان یک‌بیستمی حاصل می‌شود). می‌خواهیم بدانیم ۱۰۰۰ نان یک‌دهمی با چند نان یک‌بیستمی و یک‌سی‌امی معادل است هرگاه تعداد دو نوع نان اخیر برابر باشد (۱۰۰۰ نان یک‌دهمی معادل ۲۰۰۰ نان یک‌بیستمی یا ۳۰۰۰ نان یک‌سی‌امی است).

پاسخ مسئله میانگین عددی ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ نیست، بلکه ۲۴۰۰، یعنی میانگین همساز (یا واسطهٔ توافقی) آنهاست. به این ترتیب ۱۲۰۰ نان یک‌بیستمی و ۱۲۰۰ نان یک‌سی‌امی خواهیم داشت.

در اینجا پیشاهنگ یک رشته مسئله‌هایی را می‌یابیم که مستلزم جمع معکوس عددهای داده شده است. مثال معروف دیگر تعیین مدت لازم برای پر شدن حوضی با دو یا چند فوارهٔ دارای میزان آبدهی متفاوت است.

دنباله‌ها و سری‌ها در ریاضیات مصری

در پاپیروسی که به خط زیبایی نوشته شده است، کاتب از خواننده می‌خواهد عدد $\frac{1}{2}$ را تا بی‌نهایت ضرب کند، که مسئلهٔ لاک پشت زنون را به یاد می‌آورد و مسافت باقیمانده که پیوسته نصف می‌شود، ولی هرگز به صفرنمی رسد. بدبختانه پاپیروس شکسته است و نمی‌توان یافته‌های ریاضیدان مصری را در مورد دنبالهٔ $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ تا بی‌نهایت دانست. می‌دانیم که مصریان کسرهای $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{16}$، ...، $\frac{1}{64}$ را برای اندازه‌گیری گندم به کار می‌بردند.

روش مصری ضرب وسیلهٔ مؤثری در دست کاتبان بود و آگاهی آنان را از موضوع‌هایی مانند سری‌های توانی و ویژگی‌های میدانی اعداد صحیح و عمل‌های معکوس نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از خاصیت جابجایی ضرب، عدد کوچکتر را مضروب‌فیه قرار می‌دادند. سپس مضروب و عدد ۱ را در بالای

دو ستون می‌نوشتند و هر بار آن دو را (احتمالاً با استفاده از عمل جمع) دو برابر می‌کردند. با این کار حاصل‌ضرب‌های جزئی‌ای به دست می‌آمد که مجموعشان حاصل ضرب کلی بود. از خاصیت توزیع‌پذیری عمل ضرب برای حالتی که مضروبٌ‌فیه به صورت مجموع توان‌هایی از ۲ بود استفاده می‌کردند. مثلاً برای حاصل ضرب ۱۷×۱۳۴ این طور عمل می‌کردند (برای آسانی کار ۱۷ را که کوچک‌تر بود مضروبٌ‌فیه می‌گرفتند). حال عددهای اولی و آخری هر دو ستون را با هم جمع می‌کنیم (جدول ۱):

۱	۱۳۴ ✓
۲	۲۶۸
۴	۵۳۶
۸	۱۰۷۲
۱۶	۲۱۴۴✓

جدول ۱

$$۱۷(۱۳۴) = ۱(۱۳۴) + ۱۶(۱۳۴) = ۱۳۴ + ۲۱۴۴ = ۲۲۷۸$$

در این روش مضروب فیه به پایهٔ ۲ به صورت $۲^۴ + ۲^۰ = ۱۷$ محاسبه شده است.

به نظر می‌رسد مصریان در تصاعد هندسی مهارت داشته‌اند و عملیات حساب پایه را بر اساس آن قرار داده بودند. در کار بر روی سری‌ها و هندسه در پاپیروس احمس و معادلات درجهٔ دوم و هندسه درپاپیروس‌های مسکو و برلین، از قله‌هایی که ریاضیدانان مصری به آنها دست یافته بودند آگاه می‌شویم.

در مسئلهٔ ۶۴ ، پاپیروس احمس از تقسیم ۱۰ پیمانه گندم میان ۱۰ نفر می‌گوید به طوری که سهم هرنفر $\frac{۱}{۸}$ کمتر از نفر قبلی باشد. احمس مسئله را با روشی معادل مجموع جملات تصاعد حسابی امروزی حل کرده است که نشان می‌دهد به طور شهودی به آن دست یافته است. او نخست سهم میانگین را به دست می‌آورد، سپس حاصل‌ضرب مقدار ثابت تفاضل در نصف تعداد تفاضل‌ها را به دست می‌آورد و به مقدار میانگین می‌افزاید تا آخرین و بیشترین مقدار معلوم شود. سهم بقیه با کاستن پیاپی مقدار تفاضل معلوم می‌شود.

مسئلهٔ ۴۰ پاپیروس احمس می‌گوید ۱۰۰ نان را میان ۵ نفر بر اساس تصاعد حسابی طوری تقسیم کنید که سهم ۳ نفر اولی ۷ برابر ۲ نفر آخری باشد. شرح کامل حل مسئله‌های ۶۴ و ۴۰ در پاپیروس آمده است (پیوست را ببینید).

کاتب معلومات خود را دربارهٔ سری‌های هندسی هم در مسئلهٔ ۷۹ پاپیروس احمس نشان می‌دهد. برخی برآنند که این مسئله پیشاهنگ مسئلهٔ موسوم به «غاز مادر» است که با این جمله آغاز می‌شود: «وقتی از سنت ایوز می‌آمدم مردی را با ۷ همسرش دیدم...». مسئله جنبهٔ نظری یا بیشتر حالت قصه‌گونه دارد (جدول ۲).

۷	خانه
۴۹	گربه
۳۴۳	موش
۲۴۰۱	ارزن
۱۶۸۰۷	پیمانه
۱۹۶۰۷	جمع

جدول ۲

عبارت «جمع بر حسب قاعده» ضربی را معرفی می‌کند که حاکی از شناخت عمیق سری‌های هندسی است. به عدد ۲۸۰۱ در زیر توجه کنید که یکی بیش از ۲۴۰۱ + ۳۴۳ + ۴۹ + ۷ است. به نظر می‌رسد کاتب مصری به طور شهودی معادل این قاعده را به کار برده باشد:

$$a + a^۲ + a^۳ + a^۴ + a^۵ + \ldots + a^n = a\left(۱ + a + a^۲ + a^۳ + a^۴ + a^۵ + \ldots + a^{n-۱}\right)$$

۱	۲۸۰۱
۲	۵۶۰۲
۴	۱۱۲۰۴
جمع	۱۹۶۰۷

بسیار جالب است که فیبوناچی در حوالی سال ۱۲۰۰ میلادی با چنین سری‌هایی از آفریقا بـه ایتالیـا بازگشت که امروز در فرهنگ انگلیسی به صورت «وقتی از سنت ایوز می‌آمدم...» شناخته می‌شود.

قضیهٔ مثلث راستگوشه

آگاهی مصریان از قاعدهٔ $a^2 + b^2 = c^2$ در مثلث راست‌گوشه را نمی‌توان انکـار کـرد. بهتـر اسـت آن را قضیهٔ مثلث راستگوشه بنامیم تا قضیهٔ فیثاغورس، چون هیچ سندی از عصر فیثاغورس در بارهٔ ارتبـاط او با این قضیه در دست نیست. در حالی که اسناد زیادی از کاربرد آن در میان مردم چین، هند و بابل پـیش از عصر فیثاغورس وجود دارد.[۱۶]

در عین حال شیب اهرام چنان است که اگرنیمهٔ مقطع آنها را به صورت مثلث راستگوشـه‌ای در نظـر بگیریم، نسبت ضلع‌های آن به‌ترتیب ۳، ۴ و ۵ خواهد بود. در اینجا این پرسش به‌میـان مـی‌آیـد کـه آیـا مصریان از قضیهٔ مثلث راستگوشه آگاهی داشتند؟ من به دو مسئله در پاپیروس برلین اشاره مـی‌کنم کـه در آنها طول ضلع‌های دو مربع خواسته شده است که جمع مساحت این دو مربع برابر باشـد بـا مسـاحت مربعی دیگر. نسبت ضلع‌های دو مربع کوچکتر داده شده است. جواب مسـئله ۶، ۸ ۱۰ و ۱۲، ۱۶، ۲۰ گـز است که هر دو مضرب‌هایی است از ۳، ۴، ۵. اگر نخواهیم قضـیهٔ مثلـث راستگوشـه را محصـول مغـزی غیبگو بدانیم، باید بپذیریم که محصول تجربهٔ هندسی بوده است. این مسئله‌های پاپیروس بـرلین حـاکی از این گونه تجربه‌های هندسی است که شرح آنها در پیوست آمده است.

مصریان برای مساحی گز و وجب را به کار می‌بردند، که اولی برابر ۷ کف دست و دومی ۵ کف دست بود و وجب مربع ۲۵ کف دست و گز مربع ۴۹ کف دست می‌شد، یعنی تقریباً دو برابر اولی. بدین ترتیـب برای نصف کردن مساحت زمین مقیاس را از گز به وجب تغییر می‌دادند. آیا مصریان می‌دانستند مجمـوع مربع دو ساق در مثلث راستگوشهٔ متساوی الساقین برابر مربـع وتـر اسـت؟ گرچـه بـه مـدارک بیشـتری نیازمندیم، ولی ظاهراً آنان از این موضوع اطلاع داشته‌اند. نه در مصر و نه در بابل طول قطر و طول ضلع را نوع متفاوتی از اعداد نمی‌دانستند.

مختصات قائم در صقاره ۲۷۰۰ سال پیش از میلاد

از یک نقشهٔ معماری رسم شده برروی قطعه‌ای سنگ آهک که در صقاره[۱۷] به دست آمده، نمونهٔ استفاده

[۱۶] در این باره مراجعه کنید به کتاب کاکل طاوس از جورج گورگیس یوسف، ص ۱۴۵-۱۵۴، ۲۲۱-۲۳۰ و ۲۸۰-۲۸۲. مترجم.

[۱۷] Saqqara دهکده‌ای در نیل سفلی در پای هرم مدرج که ویرانه‌هایی از عصر فراعنه در آن باقی است.

از مختصات قائم را می‌بینیم که متعلق به ۲۷۰۰ سال پیش از میلاد است. این ترسیم معماری برای بخش منحنی سقف است. برای نقاطی که مختصات افقیشان یک گز از هم فاصله دارند، مختصات قائم (ارتفاع) داده شده که بیانگر یک منحنی است. منحنی این طرح دقیقاً مطابق با قوس سقف معبدی در همان حوالی است. این ظاهراً باید کهن ترین بهره گیری از مختصات قائم بوده باشد و گواه دیگری است بر مفهوم‌های پیچیدهٔ ریاضی که مصریان در بیرون از پاپیروس‌های ریاضی و در میدان عمل با آن سر و کار داشتند.

حجم هرم ناقص

حجم هرم ناقص به صورت $V=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$ است. در اینجا h ارتفاع هرم ناقص، a طول مربع قاعده و b طول مربع رأس است. ریاضیدانان سال‌ها کوشیده‌اند ترسیم‌هایی ابداع کنند تا از طریق تجربی به این قاعده‌ها دست یابند. البته یک قاعدهٔ بابلی هم برای حجم هرم ناقص، به صورت $V=\frac{h}{2}\left(a^2-b^2\right)$ وجود داشت. اگر هرم ناقص را با ضلع قاعده ای به طول ۱۰ گز، ضلع رأس به طول ۸ گز و ارتفاع ۲ گز بگیریم، حجم آن براساس قاعدهٔ بابلی ۱۶۴ و بر اساس قاعدهٔ مصری $162\frac{2}{3}$ گز مربع می‌شود که اختلاف تنها ۰/۸ درصد است. بنابراین برای منظورهای عملی، قاعدهٔ بابلی کاملاً کارآمد بود. اما آیا مصریان برای به دست آوردن یک چنین دستورالعملی ابزارهای واکاوی و تجزیه و تحلیل لازم را در اختیار داشتند؟

بسیاری از مورخان برآنند که مصریان حجم هرم را می‌شناختند و حجم بخش قطع شده را از آن کسر می‌کردند تا حجم هرم ناقص به دست آید. آیا ممکن است مصریان به چنین قاعده‌ای بر اساس تفاضل $\frac{j}{3}a^2-\frac{k}{3}b^2$ دست یافته باشند [در اینجا $j-k=h$]؟ کاتبان مصری این توانایی را داشتند تا آنچه را ما عبارات جبری می‌نامیم، ساده و از نو مرتب کنند. در مسئلهٔ ۱۹ پاپیروس مسکو یک معادلهٔ درجه یک با پس و پیش کردن جمله‌ها و تقسیم بر ضریب مجهول حل شده است. شکل امروزی آن به این صورت است:

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)x+4=10$$

$$\left(1\tfrac{1}{2}\right)x=10-4$$

$$x=6\div\left(1\tfrac{1}{2}\right)$$

$$x=4$$

مصریان وقتی قاعدهٔ به دست آوردن حجم هرم ناقص را یافتند امکاناتی برای اثبات درستی آن داشتند.

شکل‌های منحنی

ریاضیدانان مصری با یافتن قاعده‌های عالی برای مساحت شکل‌های منحنی گام‌هـای بلنـدی برداشـتند. نموداری در پاپیروس احمس برای مسئلهٔ ۴۸ یک هشت ضلعی را نشان می‌دهد که برای تقریب مساحت دایره به کار رفته است. قاعدهٔ مصریان برای به دست آوردن مساحت دایره و مسـاحت سـطح نیمکـره را نمی‌توان دست کم گرفت. در نتیجه، مخالفان تنها کوشیده‌اند چنـین وانمـود کننـد کـه ایـن دسـتاوردها تأثیری در کارهای بعدی یونانیان نداشته است.[۱۸]

اثبات ریاضی

یونانیان ازاستنتاج‌های منطقی مصریان چه چیزی آموختند؟ گفته شده است سولُن[۱۹] قانون‌های مصری را اقتباس و در یونان معرفی کرد. بسیاری از آثار ریاضی و ادبی مصر رشد روش‌های منطقی و اسـتقرایی را نشان می‌دهد. بحث و استدلال در ادبیات و فرهنگ مصر جایگاه والایی داشت. داستان دهقان زبـان آور دربارهٔ دهقانی است که در دادگاه با چنان فصاحتی شکایت خود را مطرح می‌کند که خبـرش بـه فرعـون می‌رسد و فرعون پس از شنیدن سخنانش به او جایزهٔ هنگفتی می‌دهد. گرچه هـیچ سـندی از مجموعـهٔ قوانین مصری به دست ما نرسیده است، ولی نقاشی‌هایی از جریان دادرسی و دست‌نوشـته‌های مهمـی از گزارش جریان آنها وجود دارد. مثلاً در پاپیروس کوچکی در موزهٔ لیدن در هلند، فهرست ۱۱ قلم اجناسی آمده که کنیزی آنها را دزدیده بوده و دادگاه او را به پرداخت سه برابر بهایشان محکوم کرده است، جز در مورد یک قلم که قیمت زیادی داشته و دو برابر مجازات در نظر گرفته شده است.

شواهد زیادی از راه حل‌هایی وجود دارد که برای یک حالت خاص و به منظـور نمـایش حالـت کلـی عرضه شده است. در نمونهٔ زیر برهان‌های سـبک مصـری و تفـاوت منطـق مصـری بـا رهیافـت اصـل موضوعی دیده می‌شود.

محققان امروزی تاریخ و فلسفه در هنگام مطالعهٔ علوم ملت‌های باستانی مایلند یک برهان یا استنتاج منطقی دارای شکل نمادی باشد و با رابطه‌هایی به صورت حروف و اعداد نمایش داده شود تا بتوان آن را معتبر دانست. ولی این درست نیست. یک برهان یا اثبات نانمادی هم که برای مقدار ویـژهٔ متغیـری داده شده کاملاً معتبر است، به این دلیل که مقدار ویژهٔ متغیر نمونه وار و کلی است و می‌تـوان آن را بـه هـر مقداری تعمیم داد. وقتی گزاره ای برای شخص معتبر باشد، دلیل و راه حل تنها بـرای تقویـت آن آورده می‌شود، نه برای اثبات.

باید بپذیریم که مصریان مانند یونانیان فکر نمی‌کردند. آنان اگر روش درستی را مـی‌یافتنـد (بـه هـر

---

[۱۸] می‌دانیم ارشمیدس مساحت دایره و عدد پی را با روش افنا، یعنی بهره‌گیری از تفاضل چندضلعی‌های محاطی و محیطی، بـه دسـت آورد. – مترجم.

[۱۹] Solon حکیم آتنی که در نیمهٔ قرن هفتم پیش از میلاد تا نیمهٔ قرن ششم پیش از میلاد می‌زیست.

طریق که یافته بودند) از خود نمی‌پرسیدند چرا به درد می‌خورد، یا درست است و برای نمایش فرایند آن به استدلال نمادی متوسل نمی‌شدند، تا مصداق کلی آن را نشان دهند. بلکه مراحل ضروری آن را به روش درستی به طور منظم بیان می‌کردند و در پایان اثبات را به ترتیب مراحلی که به حل مسئله منجر می‌شد توضیح می‌دادند. این بود آن علمی که آنان می‌شناختند.

ریاضیات اسکندرانی- یک ترکیب

وقتی اسکندر سردارش بطلمیوس اول را به حکومت مصر و سلوکوس اول را به حکومت شام و بین‌النهرین گماشت، در آن زمان دو جریان ریاضی هندسهٔ اصل موضوعی و جبر کاربردی درکنار هم و دوشادوش یکدیگر در مراکز ریاضی شمال آفریقا، جنوب اروپا، باختر و مرکز آسیا وجود داشت و بسیار گسترده‌تر از آن بود که «یونانی» شمرده شود. برخی کوشیده‌اند آن را «هلنیستی» یا یونانی‌مآب بنامند. در آن هنگام دانشمندانی از جاهای دوردست همچون هند به اسکندریه می‌رفتند، زیرا فعالیت علمی در بخش‌های غیرهلنیستی جهان، از جمله در چین، هند و آمریکای مرکزی هم وجود داشت.

پیوست

کاتب پاپیروس احمس روش آزمون و خطا را برای حل مسئله‌های مربوط به تصاعد حسابی به کار برده است:

۱۰۰ نان را میان ۵ نفر طوری تقسیم کنید که تصاعد حسابی تشکیل دهند و مجموع سهم ۳ نفر آخر ۷ برابر سهم ۲ نفر اول باشد.

احمس نخست قدر نسبت را برابر $۵\frac{۱}{۲}$ فرض کرده (که بجاست) و سهم نفر اول را ۱ گرفته است. در نتیجه، سهم بقیه به‌ترتیب $۶\frac{۱}{۲}$، ۱۲، $۱۷\frac{۱}{۲}$ و ۲۳ درآمده است، که جمعشان می‌شود ۶۰ و نه ۱۰۰. پس سهم هر یک را باید در $\frac{۱۰۰}{۶۰}$ ضرب کرد که نتیجه می‌شود $۳۸\frac{۱}{۳}$، $۲۹\frac{۱}{۶}$، ۲۰، $۱۰\frac{۵}{۶}$ و $۱\frac{۲}{۳}$.

گویا کاتب برای حل مسئله ابتدا قدر نسبت‌های مختلفی، ازقبیل۱، ۲ و غیره را امتحان کرده است.

مجموع دو عدد کوچک‌تر منهای $\frac{۱}{۷}$ مجموع سه عدد بزرگ‌تر	تفاضل	تصاعد
$۳ - ۱\frac{۵}{۷} = ۱\frac{۲}{۷}$	۱	۱, ۲, ۳, ۴, ۵
$۴ - ۳ = ۱$	۲	۱, ۳, ۵, ۷, ۹
$۵ - ۴\frac{۲}{۷} = \frac{۵}{۷}$	۳	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳

هر بار که قدر نسبت ۱ واحد افزایش یافته، مجموع دو تای کوچکتر منهای $\frac{۱}{۷}$ سه تای بزرگتر $\frac{۲}{۷}$ کاهش یافته است. برای برابر کردن این دو مجموع قدر نسبت چقدر باید افزایش یابد؟ $۱\frac{۱}{۷}$ را به $\frac{۲}{۷}$ تقسیم می‌کنیم، در می‌آید $۴\frac{۱}{۲}$. سپس $۴\frac{۱}{۲}$را با ۱ جمع می‌کنیم می‌شود $۵\frac{۱}{۲}$ و قدر نسبت به دست

می‌آید.

روش آزمون و خطا در سایر پاپیروس‌های مصری هم دیده می‌شود. درمسئله‌ای آمده است، دو مربع داریم که مجموع مساحتشان برابر مربعی است به مساحت ۱۰۰ گز مربع و طول ضلع یکی از دو مربع $\frac{۳}{۴}$ طول ضلع دیگری است. طول ضلع هر یک از دو مربع چقدر است؟

کاتب برای به دست آوردن جواب به روش آزمون و خطا توصیه می‌کند: «همیشه طول ضلع مربع را ۱ فرض کنید». در نتیجه، دو مربع داریم که طول ضلع یکی از آنها ۱ و دیگری $\frac{۳}{۴}$ گز است و مجموع مساحت دو تایشان $۱\frac{۹}{۱۶}$ گز مربع. کاتب برای به دست آوردن طول ضلع جذر $۱\frac{۹}{۱۶}$ را می‌گیرد، که می‌شود $۱\frac{۱}{۴}$ ولی مساحت مورد نظر ۱۰۰ گز مربع است و طول هر ضلع ۱۰ گز. با تقسیم ۱۰ به $۱\frac{۱}{۴}$ ضریب تصحیح ۸ به دست می‌آید. پس ضلع‌های خواسته شده ۶ و ۸ است. ضریب تصحیح نسبت جذر مساحت مربع‌هاست.