رساله‌ای از ثابت بن قرّه در هندسه

محمدمهدی کاوه‌یزدی[۱]

چکیده

مسألة إذا خرج (فی الدائرة) ضلع المثلّث و ضلع المسدّس فی جهة واحدة عن المرکز کان سطح الّذی یحاز بینهما مثل سدس الدائرة موضوع رسالهٔ کوتاهی از ثابت بن قره (۲۲۱-۲۸۸ ق) است که در آن به حل مسألهٔ «مساحت محدود به اضلاع مثلث متساوی الاضلاع و شش ضلعی منتظم در یک دایره و کمان‌هایی از همان دایره برابر با یک ششم سطح دایره است» می‌پردازد. وی برای حل مسأله در حالت اول اضلاع دو شکل را موازی، در حالت دوم متقاطع در نقطه‌ای بر محیط دایره و در حالت سوم نه موازی و نه متقاطع فرض می‌کند. در هر سه حالت فوق دو پاره‌خط در یک طرف مرکز دایره واقع هستند. در انتهای این رساله مسألهٔ دیگری آمده که ظاهراً بعداً به متن اصلی افزوده شده و در مورد تقسیم یک پاره‌خط به نسبت معینی است که برای حل آن از تقسیم پاره‌خط به نسبت طلایی استفاده شده است. تنها نسخهٔ خطی این رساله در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران نگهداری می‌شود.

ثابت بن قره

ابوالحسن ثابت بن قرّه، ریاضیدان، منجم، طبیب و مترجم زبردست حوزهٔ علمی بغداد در قرن سوم هجری است. وی در سال ۲۲۱ ق در حرّان (شهری در جنوب شرقی ترکیهٔ کنونی) در خانواده‌ای صابئی مذهب دیده به جهان گشود. وی در جوانی در حرّان به شغل صرافی اشتغال داشت و به نجوم و ریاضیات علاقه‌مند بود. محمد بن موسی بن شاکر (یکی از سه فرزند موسی بن شاکر و از دانشمندان قرن سوم هجری) در راه بازگشت از سفری که برای تهیهٔ منابع و کتب مورد نیاز دانشمندان حوزهٔ علمی بغداد به روم سفر کرده بود، با او آشنا شد و چون دریافت که وی بر زبان‌های عربی و یونانی تسلط دارد، ثابت را با خود به بغداد آورد. ثابت در آنجا به تحصیل ریاضیات، نجوم و سایر علوم معمول در آن دوره پرداخت و از زبردست‌ترین دانشمندان عصر خود شد. وی آثاری از اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، تئودوسیوس، بطلمیوس و آتولوکوس را از یونانی به عربی ترجمه و ترجمهٔ اسحاق بن حنین از اصول اقلیدس را اصلاح

[۱] کارشناس ارشد تاریخ علم (ریاضیات)، mahkavyzd@yahoo.com

کرد. اهمیت کارهای ثابت از آن جهت است که اصل یونانی بعضی از ترجمه‌های وی کـه بـه دسـت مـا رسیده است، موجود نیستند. از ثابت حدود ۱۳۰ کتاب و رساله در موضوعات مختلف علمـی بـاقی مانـده است که می‌توان آنها را در دو بخش ترجمه و تألیف طبقه‌بندی کرد. از جمله کارهای مهم وی رسـاله‌ای در نظریهٔ اعداد با موضوع اعداد متحاب است. وی در این رساله قاعده‌ای برای یـافتن عـددهای متحـاب عرضه کرده است. فرزند وی، سنان بن ثابت، و نوه‌اش، ابراهیم بن سنان، نیز از دانشـمندان بـزرگ دورهٔ اسلامی هستند. ثابت بیشتر عمر خود را در بغداد گذراند و مدتی منجم دربار خلیفـه معتضـد عباسـی و از مقربان دربار وی بود. ثابت در سال ۲۸۸ ق درگذشت. (قربانی، ۱۳۷۵، صص ۲۰۴ و ۲۰۵).

رسالهٔ کوتاهی از ثابت بن قره (۲۲۱– ۲۸۸ ق) در دست است با عنوان مسألة إذا خـرج (فـی الـدائرة) ضلع المثلّث و ضلع المسدّس فی جهة واحدة عن المرکز کان سطح الّذی یحاز بینهما مثل سدس الـدائرة. ثابت بن قره در این رساله به حل این مسأله می‌پـردازد کـه مسـاحت سـطح محـدود بـه اضـلاع مثلـث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم در یک دایره و کمان‌هایی از همان دایره، برابر با یک ششم سـطح دایره است. وی برای این کار سه حالت مختلف در نظر می‌گیرد و به حل مسأله می‌پردازد. در حالـت اول اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم را متوازی و در حالت دوم در نقطه‌ای بر محیط دایـره متقاطع فرض می‌کند. در حالت سوم هم نه موازی‌اند و نه متقاطع. در هر سه حالت فوق دو پـاره خـط در یک طرف مرکز دایره واقع هستند. روزنفلد و احسان‌اغلو (ص۵۲) این نوشته را بخـش بازمانـده از رسـالهٔ ثابت بن قره با عنوان کتاب در مساحت قطع خطوط دانسته‌اند که ابن قفطی در تاریخ‌الحکمـا[۲] از آن نـام برده است.

در انتهای این رساله مسألهٔ دیگری آمده که گویا بعدها به متن اصلی افزوده شده و در مـورد تقسـیم یک پاره خط به نسبتی معین است که برای حل آن از تقسیم پاره خط بـه نسـبت ذات وسـط و طـرفین[i] استفاده شده است. در تعریف دوم مقالهٔ ششم اصول اقلیدس آمده است:

> وقتی می‌گوییم خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است که نسبت تمـام خط به قطعهٔ بزرگ‌تر مثل نسبت قطعهٔ بزرگ‌تر باشد به قطعهٔ کوچک‌تر.

در قضیهٔ ۳۰ همین مقاله چگونگی تقسیم خط راست متناهی مفروضی بـه نسـبت ذات وسـط و طـرفین توضیح داده شده است. مقالهٔ سیزدهم کتاب اصول در مورد چگـونگی سـاخت چنـد وجهی‌هـای منـتظم افلاطونی و محاط کردن آنها در یک کره است. اقلیدس برای سـاخت ضـلع چنـد وجهی‌هـای منـتظم از نسبت ذات وسط و طرفین استفاده می‌کند. در قضیه‌های ۱ تا ۶ این مقاله، پاره‌خط‌ها به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌شوند و طی قضیه‌های ۷ و ۸ ضلع پنج‌ضلعی منتظم ساخته می‌شود.

[۲] ابن قفطی [۱۳۷۱، ص ۱۶۶]

نسخهٔ خطی رساله

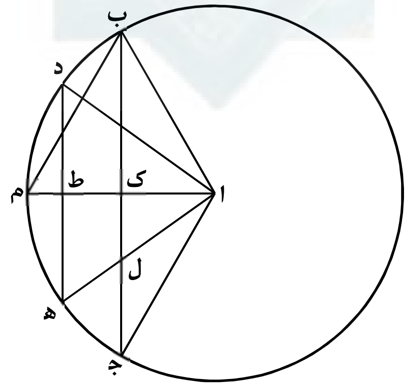
تنها نسخهٔ خطی این رساله اکنون در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران (قبلاً در کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات) به شمارهٔ ۲۸۴/۷، ضمن مجموعه‌ای شامل هفت رسالهٔ دیگر، نگهداری می‌شود. این نسخه را امام جمعهٔ کرمان، آقای احمد جوادی، به کتابخانه اهدا کرده است. اغلب رساله‌های این مجموعه به محتوای کتاب اصول اقلیدس مربوط می‌شود. خط آن از نوع نسخ ریز سده‌های ۷، ۸ و ۹ هجری است. شمارهٔ ثبت آن هم ۷۵۵۸۹ است[ii].

کارهای انجام شده روی رساله

ژاک سزیانو[iii] چاپ عکسی نسخهٔ خطی را همراه با ترجمهٔ فرانسوی و شرح مطالب آن با نام إضافة لثابت بن قرة إلیٰ کتاب أقلیدس فی القسمة للأشکال الهندسیة در ۱۹۸۸م در مجلهٔ تاریخ علوم عربی و اسلامی منتشر کرده است[iv]. ب. آ. روزنفلد[v] نیز ترجمهٔ روسی این اثر را در مجموعه‌ای با عنوان «رساله‌های ریاضی تألیف روزنفلد و دیگران» (ص ۶۷–۶۸) در سال ۱۹۸۴ انتشار داده است (روزنفلد و احسان‌اغلو، ص ۵۹۶).

ترجمهٔ متن رساله

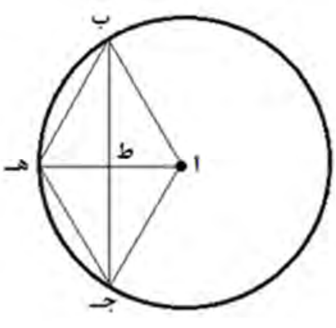
مسأله‌ای از ثابت بن قرّه (رضی اللّه عنه)**:** هرگاه در دایره‌ای ضلع مثلث (متساوی‌الاضلاع) و ضلع شش‌ضلعی (منتظم) در یک طرف مرکز (دایره) رسم شوند، سطحی که بین آنها (و دو کمان دایره) قرار می‌گیرد یک ششم (سطح) دایره است.



[شکل ۲. ۱]

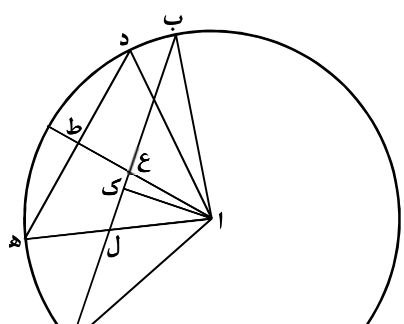
برهان: این دو ضلع یا موازی (رسم می‌شوند) یا از یک نقطه از محیط دایره (رسم می‌شوند)، یا این که جدا از هم و غیر موازی رسم می‌شوند.

[**حالت اول**]: مانند شکل اول (← شکل ۲. ۱) آنها را موازی رسم می‌کنیم و آنها دو خط **ب ج**، **ه**



شکل ۲. ۲

د در دایرهٔ **ب د ه ج** هستند؛ و مرکز (دایره) را نقطهٔ **ا** می‌گیریم و خطوط **ب ا**، **ج ا**، **د ا**، **ه ا** را رسم می‌کنیم؛ و عمود **ا ط** را بر ضلع شش‌ضلعی (منتظم)، که **د ه** است، رسم می‌کنیم؛ پس (این عمود) ضلع مثلّث را، که **ب ج** است، در نقطهٔ **ک** قطع می‌کند و بر آن هم عمود می‌شود. و عمود **ا ط** را امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در نقطهٔ **م** قطع کند. و خط **ب م** را رسم می‌کنیم؛ کمان **ب م ج** دو برابر کمان **ب م** است، زیرا خط **ا ک ط م** بر **ب ج** عمود است. پس خطّ **ب م** نیز ضلع شش‌ضلعی (منتظم) است. قطاع **ا ب م** برابر با قطاع **ا د ه** است و هر یک از آنها یک ششم (سطح) دایره هستند. و مثلّث **ا ب م** برابر با مثلّث **ا د ه** است و هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. قطاع **ا د م** نصف قطاع **ا د ه** است، پس نصف قطاع **ا ب م** نیز هست. پس دو قطاع **ا د م**، **ا ب د** و همچنین دو قطاع **ا ه م**، **ا ه ج** متساویند. چون دو مثلّث **ا ب م**، **ا د ه** هم متساوی و هم متساوی‌الاضلاع‌اند و دو خط **ب ک**، **ا ط** بر هم عمودند، پس دو مثلّث **ا ب ک**، **ا د ط** متساویند. همچنین دو مثلّث **ا ج ک**، **ا ه ط** متساویند. چون دو مثلّث **ا ج ک**، **ا ه ط** متساویند، اگر از آن دو، مثلّث **ا ک ل**، را که مشترک است، حذف کنیم؛ مثلّث **ا ج ل** برابر با سطح **ه ط ک ل** باقی می‌ماند. اگر قطاع **ج ل ه** را به طور مشترک اضافه کنیم، قطاع **ا ج ه** برابر با سطح **ج ه ط ک** می‌شود. همچنین ثابت می‌شود که قطاع **ا ب د** برابر با سطح **ب د ط ک** است؛ بنابراین سطح **ب ج ه د** باسره[vi] است که محدود شده به دو خط **ب ج**، **ه د** از دایره و برابر با دو قطاع **ا ج ه**، **ا ب د** است که آن دو قطاع یک ششم (سطح) دایره هستند. پس سطح **ب ج ه د** برابر یک ششم (سطح) دایره است و این آن چیزی بود که می‌خواستیم آن را ثابت کنیم.



شکل ۲. ۳

[**حالت دوم**]: اگر دو ضلع، یعنی ضلع مثلّث (متساوی‌الاضلاع) و ضلع شش‌ضلعی (منتظم)، از یک نقطهٔ دایره **ج ه ب**، به صورت شکل دوم (← شکل ۲. ۲)، رسم کنیم؛ آنگاه سطحی که محدود به این دو ضلع و کمان (دایره) است، یک ششم (سطح) دایره است.

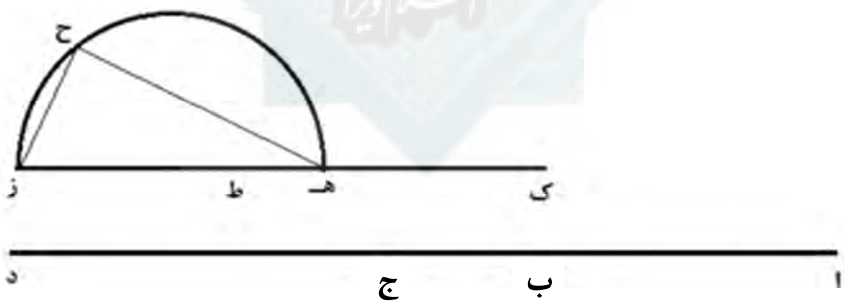
برهان: (فرض می‌کنیم) خط **ج ب** ضلع مثلّث و خط **ب ه** ضلع شش‌ضلعی (منتظم) باشد. (اگر) خطوط **ا ج**، **ا ب**، **ا ه** رسم شوند، خط **ج ب** خط **ا ه** را در نقطهٔ **ط** نصف می‌کند؛ پس مثلّث **ب ا ط** برابر با مثلّث **ه ب ط** می‌شود. و قطاع **ه ب ط** مشترک است، پس قطاع **ا ه ب** برابر قطاع **ج ه ب** و قطاع **ج ه ب** برابر قطاع **ب ج ه** است، که محدود به دو

ضلع و کمان **ه ج** است و آن برابر با قطاع **ا ه ب** است. قطاع **ا ه ب** یک ششم (سطح) دایره است؛ پس قطاعی که محدود به ضلع مثلّث (متساوی‌الاضلاع) و ضلع شش‌ضلعی (منتظم) و کمان **ج ه** است، یک ششم (سطح) دایره است، و این آن چیزی بود که می‌خواستیم.

[**حالت سوم**]: اگر ضلع مثلث (متساوی‌الاضلاع) و ضلع شش‌ضلعی (منتظم)، مطابق شکل سوم (← شکل ۲. ۳)، نه موازی باشند و نه از یک نقطه رسم شده باشند، مانند دو خط **ب ج**، **ه د**؛ آنگاه سطحی که محدود به دو خط **ج ب**، **ه د** و کمان‌های **ج ه**، **د ب** است، یک ششم (سطح) دایره را تشکیل می‌دهد.

برهان: عمود **ا ط** (را بر ضلع **ب د** از شش‌ضلعی منتظم) و عمود **اک** (را بر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع) رسم می‌کنیم، در نتیجه دو مثلّث **ا ه ط**، **ا ج ک** متساویند. و مثلّث مشترک **ا ل ک** را حذف می‌کنم؛ مثلّث **ا ج ل** باقی می‌ماند که مساوی با سطح **ل ه ط ع** و مثلّث **ا ک ع** است. و قطاع **ج ل ه** را (به طور) مشترک (اضافه) می‌کنیم؛ پس قطاع **ا ج ه** برابر با سطح **ج ه ط ع** و مثلّث **ا ک ع** می‌شود. و با همین برهان مثلّث **ا ک ع** و قطاع **ا د ب** برابر با سطح **ع ط د ب** می‌شود. بنابراین کل سطح **ج ب د ه** برابر با (سطح) دو قطاع **ا ج ه**، **ا د ب** می‌شود و آن دو، یک ششم (سطح) دایره‌اند. پس سطح **ج ه د ب** یک ششم (سطح) دایره است و این آن چیزی بود که می‌خواستیم آن را ثابت کنیم.

مسأله: می‌خواهیم (پاره خط) مفروض **ا د** را در دو نقطهٔ **ب**، **ج** به سه قسمت کنیم، به طوری که نسبت **ب ج** به **ج د** برابر با نسبت **ج د** به **ب د** شود؛ و (نیز) مجموع مربّعات **ب ا**، **ب ج** برابر با مربّع **ب د** شود.



شکل ۲. ۴

جواب: خط دلخواهی رسم می‌کنیم و (فرض می‌کنیم) آن خط **ه ز** باشد و آن را به نسبت ذات وسط و طرفین در نقطهٔ **ط** تقسیم می‌کنیم و (فرض می‌کنیم) **زط** قطعهٔ بلندتر باشد. سپس بر **ه ز** نیم دایرهٔ **ز ح ه** را می‌گذرانیم و وتر **ز ح** را برابر با **ه ط** رسم می‌کنیم و **ه ح** را وصل می‌کنیم. و **ه ز** را تا نقطهٔ **ک** امتداد می‌دهیم و **ه ک** را برابر با **ه ح** جدا می‌کنیم؛ پس می‌گویم که اگر خط **ک ز** را در دو نقطهٔ **ه**، **ط** قسمت کنیم، هم چنان که می‌خواستیم **ا د** مفروض، تقسیم می‌شود.

برهان: نسبت **ه ط** به **ط ز** برابر نسبت **ط ز** به **ه ز** است. و مربّع **ه ح** با مربّع **ز ح** برابر با مربّع **ه ز**

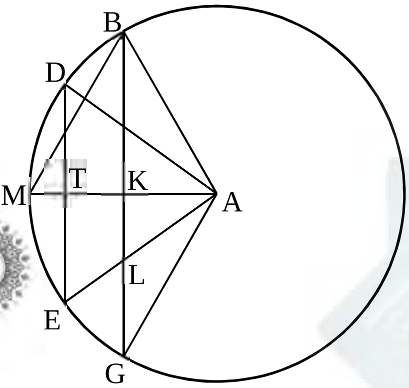
است. ولی **ه ک** برابر **ه ح** و **ه ط** برابر **ز ح** است؛ بنابراین مربّع **ه ط** با مربّع **ک ه** برابر با مربّع **ه ز** است. پس اگر (پاره خط) مفروض **ا د** را مانند (پاره خط)**ک ز** تقسیم کنیم، آنچه می‌خواستیم آشکار می‌شود.

بیان امروزی رساله

مسأله: قسمتی از سطح دایره که محدود به ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم و کمان‌هایی از آن دایره است، یک ششم سطح آن دایره است.

برای اثبات حکم سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم موازیند.



شکل ۳. ۱

فرض می‌کنیم BG ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع و DE ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ BDEG باشند و $BG \parallel DE$. مرکز دایره را نقطهٔ A اختیار کرده و آن را به نقاط B، D، E و G وصل می‌کنیم. از نقطهٔ A عمود AT را بر وتر DE رسم می‌کنیم. این عمود وتر BG را در نقطهٔ K و دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند. چون

(۱) $$BG \parallel DE$$

و

(۲) $$AM \perp DE$$

پس:

(۳) $$AM \perp BG$$

پس بنا بر قضیهٔ سوم مقالهٔ سوم اصول، AM وترهای BG و DE و کمان‌های متناظر آنها را نصف می‌کند. بنابراین:

(۴) $$\text{arc}\, BMG = ۲\, \text{arc}\, BM$$

از B به M وصل می‌کنیم. چون $\text{arc}\, BM = \text{arc}\, DE$، پس $BM = DE$ و در نتیجه وتر BM نیز ضلع شش‌ضلعی منتظم است. پس قطاع ABM با قطاع ADE برابر و هر یک مساوی یک ششم سطح دایره‌اند.

ثابت می‌کنیم مثلث‌های $\triangle ABM$ و $\triangle ADE$ متساوی‌الاضلاع و برابرند. چون قطاع ADM نصف قطاع ADE است، بنابراین نصف قطاع ABM نیز هست. بنابراین قطاع‌های ADM، ABD و AEM مساویند. پس دو مثلث $\triangle ABM$ و $\triangle ADE$ متساوی‌الاضلاع و برابرند.

فرض می‌کنیم ضلع شش‌ضلعی منتظم (پاره خط DE) برابر a باشد. بنا بر این ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع (پاره خط BG) برابر با $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ خواهد بود. دو مثلث $\triangle ABK$ و $\triangle ADT$ را در نظر

می‌گیریم.

(۵) $$\triangle ABK : \measuredangle AKB = ۹۰^\circ \quad , \quad BK = \frac{۱}{۲} BG = \frac{a\sqrt{۳}}{۴} \quad , \quad AB = a \rightarrow AK = \frac{a}{۲}$$

بنابراین:

(۶) $$S_{ABK} = \frac{۱}{۲} BK.AK = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۴}\right)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۱۶}$$

به همین صورت در مثلث $\triangle ADT$ داریم:

(۷) $$\triangle ADT : \measuredangle ATD = ۹۰^\circ , TD = \frac{a}{۲} , AD = a \rightarrow AT = \frac{a\sqrt{۳}}{۴}$$

بنابراین:

(۸) $$S_{ADT} = \frac{۱}{۲} AT.TD = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۴}\right)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۱۶}$$

پس:

(۹) $$S_{ABK} = S_{ADT}$$

و نیز:

(۱۰) $$S_{AGK} = S_{AET}$$

بنا بر این اگر سطح مثلث مشترک $\triangle AKL$ را حذف کنیم،

(۱۱) $$S_{AGL} = S_{\square ETKL}$$

اگر سطح شکل GLE را به طرفین تساوی اضافه کنیم، داریم:

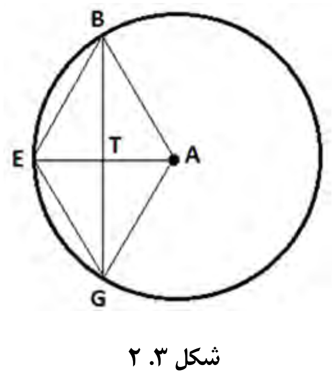
مساحت شکل $GETK$ = مساحت قطاع GAE

و به همین صورت ثابت می‌شود که:

مساحت شکل $BDTK$ = مساحت قطاع BAD

پس سطح $BGED$ که به دو خط BG و ED و کمان‌های دایره محدود شده، برابر با سطح دو قطاع GAE و BAD است که یک ششم سطح دایره‌اند. پس سطح $BGED$ یک ششم سطح دایره است.

حالت دوم: فرض می‌کنیم اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره از یک نقطهٔ محیط دایره رسم شده باشند. برای این کار فرض می‌کنیم در دایرهٔ BEG به مرکز A پاره خط‌های BG و BE به ترتیب اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم باشند.



شکل ۳. ۲

از نقطهٔ A به نقاط B، E و G وصل می‌کنیم. چون کمان

BE نصف کمان BG است، پس نقطهٔ E وسط کمان BG است و لذا بنا بر قضیهٔ سوم مقالهٔ سوم اصول، خط AE بر وتر BG عمود است. از طرفی چون BE ضلع شش‌ضلعی منتظم است با شعاع دایره برابر است، بنا بر این چهار ضلعی ABEG لوزی است و لذا قطرهایش، آن را بـه چهـار مثلث متساوی تقسیم می‌کنند. بنابراین:

(۱۲) $$\triangle ABT = \triangle BTE$$

قطاع EBG را، که محدود به اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره و کمان EG است، را در نظر می‌گیریم. چون

(۱۳) سطح مثلث BET + سطح ETG = سطح قطاع EBG

پس بنا بر رابطهٔ (۱۲) داریم:

(۱۴) سطح مثلث ABT + سطح ETG = سطح قطاع EBG

اما

(۱۵) سطح ETG = سطح ETB

بنابراین از رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) داریم:

(۱۶) سطح مثلث ABT + سطح ETB = سطح قطاع EAB = سطح قطاع EBG

چون قطاع EAB، قطاع متناظر با ضلع شش‌ضلعی منتظم است، پس

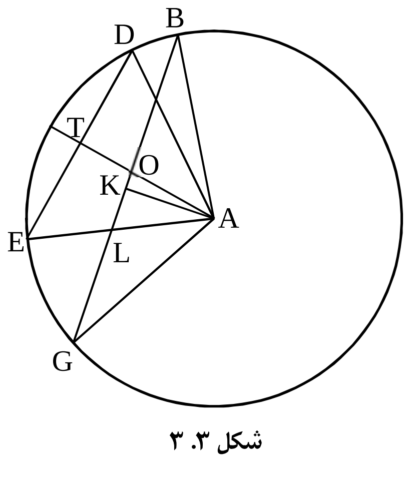
(۱۷) سطح قطاع EAB = یک ششم سطح دایره

پس از رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) داریم:

(۱۸) سطح قطاع EBG = یک ششم سطح دایره

و حکم ثابت می‌شود.

حالت سوم: فرض می‌کنیم پاره خطهای BG و DE بـه ترتیـب اضـلاع مثلـث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم محاطی در دایرهٔ به مرکز A (مطابق شکل ۳. ۳) باشند که نه موازیند و نه متقاطع.



شکل ۳. ۳

عمود AT را بر وتر DE و عمود AK را بر وتر BG رسم می‌کنیم. بنا بر آن که قطر عمود بـر وتـر، وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند و با فرض آنکه $DE = a$، داریم:

$$DT = TE = \frac{a}{۲} \,,\, BK = KG = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \tag{۱۹}$$

بنابراین:

$$AKG : KG = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}, AG = a \rightarrow AK = \frac{a}{۲} \tag{۲۰}$$

$$S_{AKG} = \frac{۱}{۲} KG.AK = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{a}{۲}\right) = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۸} \tag{۲۱}$$

به همین صورت:

$$S_{ATE} = \frac{۱}{۲} TE.AT = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{۲} \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۸} \tag{۲۲}$$

بنابراین از رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$S_{AKG} = S_{ATE} \tag{۲۳}$$

سطح مثلث $\triangle ALK$، که بین سطح دو مثلث $\triangle AKG$ و $\triangle ATE$ مشـترک اسـت، را حـذف مـی‌کنیم. بنابراین:

$$S_{\triangle AKO} + S_{\square LOTE} = S_{\triangle AGL} \tag{۲۴}$$

سطح شکل GLE را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم. پس داریم:

سطح شکل GLE + سطح مثلث $\triangle AGL$ = سطح چهار ضلعی $LOTE$ + سطح مثلث $\triangle AKO$ + سطح شکل GLE

بنابراین:

(۲۵) سطح قطاع AGE = سطح $GETO$ + سطح مثلث $\triangle AKO$

و با همین شیوه ثابت می‌شود که:

(۲۶) سطح مثلث $\triangle AKO$ + سطح قطاع ADB = سطح $OTDB$

پس:

(۲۷) سطح $GBDE$ = سطح قطاع AGE + سطح قطاع $\triangle ADB$

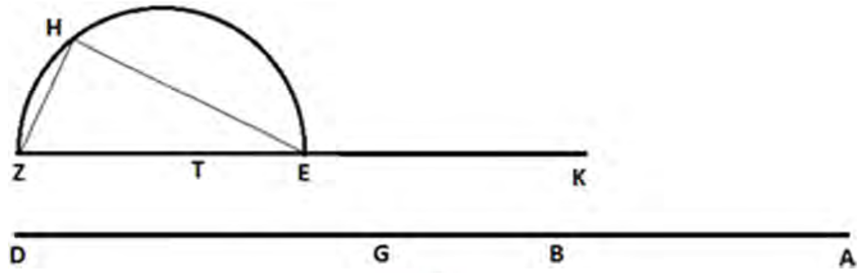
مسأله: می‌خواهیم پاره خط مفروض AD را توسط نقاط B و G به سه قسمت تقسیم کنـیم بـه طـوری که:

الف) $\frac{BG}{GD} = \frac{GD}{BD}$

ب) $AB^{۲} + BG^{۲} = BD^{۲}$.

جواب: خط دلخواه EZ را رسم می‌کنیم و آن را در نقطهٔ T به نسبت ذات وسط و طرفین (نک: پی‌نوشت۲) تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم ZT قسمت بلندتر باشد. به قطر ZE نیم دایره‌ای رسم می‌کنیم. به مرکز Z و به شعاع ET کمانی رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در نقطهٔ H قطع نماید. از E به H وصل می‌کنیم. ZE را امتداد داده و روی آن و در طرف نقطهٔ E، نقطهٔ K را چنان اختیار می‌کنیم که:

$$EK = EH \qquad (۲۸)$$



شکل ۳. ۴

اکنون پاره خط KZ توسط دو نقطهٔ T و E به سه قسمت تقسیم شده است. چون نقطهٔ T پاره خط EZ را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کرده است، پس:

$$\frac{EZ}{TZ} = \frac{TZ}{ET} \qquad (۲۹)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ EZH بنا بر رابطهٔ فیثاغورس (قضیهٔ ۴۷ مقالهٔ اول اصول) داریم:

$$EH^۲ + HZ^۲ = EZ^۲ \qquad (۳۰)$$

اما

$$HZ = TE \text{ و } EH = EK \qquad (۳۱)$$

بنابراین:

$$EK^۲ + TE^۲ = EZ^۲ \qquad (۳۲)$$

پس اگر پاره خط AD به همان نسبتی که پاره خط KZ در نقاط T و E تقسیم شده است، در نقاط B و G تقسیم شود، حکم ثابت است.

تصویر نسخهٔ خطی

مسئلة لثابت بن قرة رضي الله عنه

اذا اخرج في دائرة ضلع المثلث وضلع المسدس في جهة واحدة عن المركز
كان ما يقطع القطعة التي تحاز بينهما مثل سدس الدائرة. برهان ذلك ان هذين
الضلعين اما ان يخرجا متوازيين واما من نقطة واحدة من المحيط واما
منهما في غير متوازيين فليخرجا في الصورة الاولى متوازيين وهما خطا ب ج
د ه في دائرة ب د ه ج ولتكن المركز نقطة ا ونصل خطوط ا ب ا ج ا د ا ه
ونخرج عمود ا ط على ضلع المسدس وهو د ه فيفصل ضلع المثلث وهو ب ج
على نقطة ك ويكون ايضا عمودا عليه وننفذ عمود ا ط الى محيط الدائرة
حتى يلقاه على م ونصل خط ب م فقوس ب م ج ضعف قوس ب م لان خط
ا ك ط م عمود على ب ج فخط ب م ضلع المسدس ايضا وقطاع ا ب م مثل
قطاع ا د ه وكل واحد منهما سدس الدائرة ومثلث ا ب م مثل مثلث ا د ه
وهما متساويا الاضلاع وقطاع ا د م نصف قطاع ا د ه فهو ايضا نصف
قطاع ا ب م فقطاعا ا د م ا ب د وكذلك
يكون قطاعا ا ه م ا ه ج متساويين و
ايضا فلان مثلثي ا ب م ا د ه
متساويان متساويا الاضلاع
وخطا ب ك ا ط عمودان فهما
يكون مثلثا ا ب ك ا د ط متساويان
وكذلك ايضا يكون مثلثا ا ج ك ا ه ط

دستنوشتهٔ رسالهٔ ثابت بن قره در هندسه، صفحهٔ اول

متساويان فلان مثلثي اجـ اهط متساويان يكون اذا القينا منهما مثلث
اكل المشترك بقي مثلث اجل مثل سطح ه ط ك ل واذا جعلنا قطاع
د ل م مشتركا وزدناه صار قطاع اجه مثل شكل جه ط ك وكذلك ايضا
يبين ان قطاع اب ه مثل شكل ب د ط ك فيصير بسطح ب ه د باسره وهو
الذي حازه خطا ب د ه د من الدائرة مثل قطاعي اجه اب د وهذان
القطاعان مثل سدس الدائرة فسطح ب ه د مثل سدس الدائرة وذلك
ما اردنا ان نبين ۞ فان اخرج الضلعان اعني ضلع المثلث و
ضلع المسدس من نقطة واحدة على ما الصورة الثانية وهي دائرة جه ب
فان السطح الذي يحيط به الضلعان والقوس سدس الدائرة برهان ذلك
ان خط جب مثل ضلع المثلث وخط ب ه

ضلع المسدس وقد اخرجت خطوط اج
اب اط فخط جب قطع خط اه بنصفين
على نقطة ط فمثلث ب اط مثل مثلث
ه ب د وقطاع ه ب ط مشترك فقطاع اه ب
مثل قطاع جه ب وقطاع جه ب مثل قطاع ب جه الذي يحيط به الضلعان
وقوس جـ وهو مثل قطاع اه ب وقطاع اه ب سدس الدائرة فالقطاع
الذي يحيط به ضلع المثلث وضلع المسدس وقوس جه سدس الدائرة
وذلك ما اردناه ۞ فان لم تخرج ضلع المثلث وضلع المسدس على موازاة
ولا من نقطة واحدة على ما في الصورة الثالثة على مثال خطي ب جـ ه د

دستنوشتهٔ رسالهٔ ثابت بن قره در هندسه، صفحهٔ دوم

فان السطح الذي يحيط به خطا جه هد وقوسا ده دج سدس الدائرة
برهانه: انا نخرج عمود اط و عمود اك فيكون مثلثا اهط ادك
متساويين ونلقي مثلث الك المشترك يبقى مثلث ادل مثل سطح لهطع
ومثلث لجع ونجعل قطاع دل مشتركا
فيصير قطاع اده مثل سطح دهطع
ومثلث لجع وبهذا البرهان
يكون مثلث اكع وقطاع ادج
مثل سطح عطدج فيصير جميع سطح
جده مثل قطاعي اده ادج وهما مثل
سدس الدائرة فسطح جهدج سدس الدائرة وذلك ما اردنا ان نبين

مسئلة

نريد ان نقسم اب المفروض بثلثة اقسام على نقطتي ج د حتى يكون نسبة
بج الى جد كنسبة جد الى دا ويكون مجموع مربعي اب اج مثل مربع بد
الجواب نخرج خطا كيف ما وقع ولكن خط هز ونقسمه على نسبة ذات وسط
وطرفين على نقطة ط و زط الطول القسمين ثم نعمل على هز نصف دائرة زحه
ونخرج وتر زح مثل هط ونصل هح ونخرج هز على استقامة الى ك ونجعل هك
مثل زح فاقول انا قد قسمنا خط كز على نقطتي
ه ط كما اردنا قسمة اب المفروض برهانه
ذلك ان نسبة هط الى طز كنسبة طز الى هز ومربع هح مع مربع زح مثل مربع

دستنوشتهٔ رسالهٔ ثابت بن قره در هندسه، صفحهٔ سوم


هز وكذلك هك مثل هح و هط مثل دح فمربع هط مع مربع كه مثل مربع هز
فاذا اسقطنا اء المعروض [illegible] قسمه كز فقد علمنا ما اردنا

من كتاب خواص المثلث لارشميدس

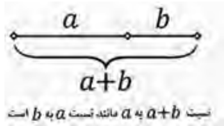
كل مثلث قائم الزاوية فان مربع اضلاعه الثلثة اذا جعلت كخط واحد مساو
لضعف سطح القائم الزوايا الذي يحيط به اضلاعه الثلثة والعمود المخرج
من الزاوية القائمة الى وترها اذا جعل الجميع كخط واحد في وتر الزاوية
القائمة مثاله ا ب ج زاوية ا منه قائمة اقول ان مربع
اضلاعه اذا جعلت كخط واحد مساو لضعف [illegible] مع العمود وهو اد
في القاعدة وهي ب ج برهانه فلنخرج ب ج على استقامة ونفصل
منه ب ه مثل اب و ه ز مثل ا ج وج ح مثل اد ونفصل ح ط
مثل ب ج فط [illegible] قسم على [illegible] بنصفين ونزيد فيه [illegible] فضرب [illegible]
في رط مع مربع طح مثل مربع [illegible] ومربع رح مثل
مربعي [illegible] وضرب [illegible] في [illegible] مرتين ومربعا
[illegible] مثل مربع طح المساوي للقاعدة فسقط
المتساوية بقي ضرب [illegible] في رط مثل ضرب [illegible] في [illegible] فضرب ح [illegible] المساوي
للعمود في ط [illegible] وهو [illegible] القاعدة مساو لضرب [illegible] اعني مجموع الاضلاع
في رط فنسبة [illegible] الى [illegible] كنسبة رط الى ط [illegible] واذا ركبنا كانت نسبة
[illegible] الى [illegible] كنسبة [illegible] الى ط [illegible] و [illegible] وسطا النسبة فضرب ح [illegible]
في ط [illegible] مثل مربع [illegible] وذلك ما اردنا بيانه كل مثلث قائم الزاوية

دستنوشتهٔ رسالهٔ ثابت بن قره در هندسه، صفحهٔ چهارم

پی‌نوشت‌ها

نسبت ذات وسط و طرفین [i]

بنا بر تعریف دوم مقالهٔ ششم کتاب اصول اقلیدس، نسبت ذات وسط و طرفین به صورت زیر تعریف می‌شود: «وقتی می‌گوییم خط راستی به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است که نسبت تمام خط به قطعهٔ بزرگ‌تر مثل نسبت قطعهٔ بزرگ‌تر به قطعهٔ کوچک‌تر باشد». نسبت ذات وسط و طرفین که آن را «نسبت طلایی» هم می‌نامند با علامت φ (فی— از حروف الفبای یونانی) نمایش داده می‌شود و به این صورت نیز توصیف می‌شود که نسبت مجموع دو مقدار مثبت به مقدار بزرگ‌تر برابر است با نسبت مقدار بزرگ‌تر به مقدار کوچک‌تر. نسبت طلایی یک عدد جبری گنگ با مقدار تقریبی ۱/۶۱۸ است:



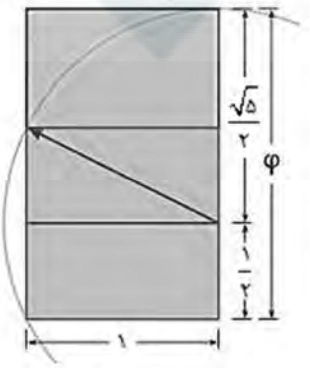
$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi=۱/۶۱۸۰۳۳۹۸۹...$$

علت این نامگذاری این است که در تناسب $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ وسطین تناسب یکی هستند (a) ولی طرفین آن ($a+b$ و b) متفاوتند. پس در این تناسب یک وسط و دو طرف داریم. «ذات» در اینجا به معنی دارنده است.

حد اقل از زمان نوزایی، بسیاری از هنرمندان و معماران آثارشان را بر اساس نسبت طلایی می‌ساختند. مخصوصاً از شکل «مستطیل طلایی» در کارهایشان استفاده می‌کردند که نسبت طول به عرض آن برابر نسبت طلایی است. عقیده بر این بود کـه مستطیلی بـا ایـن تناسب چشم‌نوازتر است. ریاضیدان‌ها هم نسبت طلایی را به دلیل داشتن خواصی جالب و منحصر بـه فـرد مطالعـه می‌کردنـد. نام‌هـای دیگری که برای این نسبت استفاده شده است، عبارت است از: بخش طلایی، میانگین طلایی، عدد طلایی، بخش میانی، تناسـب الهـی، بخش الهی، تناسب طلایی، برش طلایی و میانگین فیدیاس (Phidias، مجسمه‌ساز یونانی در ۵۰۰ — ۴۳۲ ق. م). ۲۰۰

طریقهٔ رسم نسبت طلایی و مستطیل طلایی

در قضیهٔ ۱۱ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس چگونگی تقسیم یک خط راست به نسبت ذات وسط و طرفین آمده است. بر اساس این قضیه، اگر AB پاره خط مفروضی باشد که می‌خواهیم آن را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم، مربع ABDC را بر آن بنا می‌کنیم و وسط AC را E نامیده و آن را به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. سپس CA را امتداد می‌دهیم و بر آن EF را مساوی با BE جدا می‌کنیم. مربع FH را بر AF بنا می‌کنیم به طوری که یک ضلع آن بر AB قرار داشته باشد. نقطهٔ H نقطهٔ مورد نظر است.



مقدار نسبت طلایی

نسبت طلایی به صورت

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi$$

تعریف می‌شود. معادلهٔ سمت راست تساوی نشان می‌دهد که $a=b\varphi$، که با جایگذاری این مقدار در عبارت سمت چپ داریم:

$$\frac{b\varphi + b}{b\varphi} = \frac{b\varphi}{b}$$

با حذف b از طرفین تساوی داریم:

$$\frac{\varphi + ۱}{\varphi} = \frac{\varphi}{۱}$$

با ضرب طرفین تساوی در φ به معادلهٔ درجهٔ دوم $\varphi^{۲} - \varphi - ۱ = ۰$ می‌رسیم که تنها ریشهٔ مثبت آن عبارت است از:

$$\varphi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} = ۱/۶۱۸۰۳۳۹۸۹...$$

[ii] دانش پژوه، ۱۳۴۴، ص ۴۳.

[iii]. Jacques Sesiano.

[iv]. J. Sesiano, “Un complément de Ṯabit ibn Qurra au ‘ ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ ’ d'Euclide”, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschften*, no. 4 (1987/88), pp. 149-159.

این نشریه در مؤسسهٔ تاریخ علوم عربی و اسلامی دانشگاه فرانکفورت، به سرپرستی پروفسور فؤاد سزگین منتشر می‌شود.

[v]. B. A. Rosenfeld.

[vi] کشتزار، کشت و زراعت، زمین کشتزار (دهخدا، ۱۳۷۷، ذیل واژهٔ «باسره»). در اینجا ظاهراً منظور شکلی است که مطابق هیچ‌یک از شکل‌های هندسی تعریف شده نباشد.

منابع

اقلیدس، اصول اقلیدس (سیزده مقاله)، به کوشش تامس لیتل هیث، ترجمهٔ محمد هادی شفیعی‌ها، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اوّل، ۱۳۸۷ ش؛

ابن قفطی، تاریخ الحکماء، ترجمهٔ کهن فارسی، به کوشش بهین دارایی، دانشگاه تهران ۱۳۷۱.

دانش پژوه، محمد تقی، «فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران»، مجلهٔ دانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران، سال ۱۳، شمارهٔ ۱، مهر ۱۳۴۴ش؛

دهخدا، علی اکبر، لغت‌نامه، زیر نظر دکتر محمّد معین و دکتر سیّد جعفر شهیدی، تهران، مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۷۷ش؛

قربانی، ابوالقاسم، زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، چاپ دوم، تهران ۱۳۷۵ش.

Boris A. Rosenfeld & Ekmeleddin Ihsanoğlu, *Mathematicians, Astronomers, and Other Sholars of Islamic Civilization (and their works, 7th- 19th c.)*, Istanbul, Research Centre for Islamic History, Art and Culture (IRCICA), 2003;

Sezgin, Fuat., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Mathematik, bis ca. 430H, Leiden, 1974.