بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال نهم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۹

شمارهٔ پیاپی: ۱۸

تصویر پشت جلد: نقش کاشیکاری در آرامگاه سیده نفیسه در قاهره (بنگرید به مقالهٔ نقوش هندسی هنر اسلامی در همین شمارهٔ میراث علمی)

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۶۰،۰۰۰ تومان

فهرست

دیوفانتوس، کرجی و معادلات درجهٔ دوم[۱]

جفری ا. اوکس[۲]
ترجمهٔ محمدمهدی کاوه‌یزدی[۳]

چکیده

دیوفانتوس در ابتدای کتاب خود، اریثمتیکا[۴]، قول می‌دهد که چگونگی حل معادلات سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم را شرح دهد، اما چنین قواعدی در بخش‌های بازمانده از کتاب او موجود نیست. ولی کرجی سرنخ‌هایی را عرضه می‌کند که چگونه آن‌ها را از دیوفانتوس گرفته و بیان کرده است. کرجی در کتاب جبر خود، الفخري في الجبر والمقابلة، هم قاعدهٔ متعارف جبر دورهٔ اسلامی برای حل معادلات سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم و هم تغییراتی را که دیوفانتوس اعمال کرده آورده است. وی پس از اثبات قواعد، راه‌حلی عرضه می‌کند و آن را «روش دیوفانتوس» می‌نامد. با بررسی اثبات‌ها و مسائل در چندین اثر کرجی ادعا می‌کنیم که دیوفانتوس قاعده‌اش برای حل معادلات سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم را از طریق این «روش دیوفانتوس» استخراج نموده و اینکه کرجی، استنتاجات و قواعد خود را از اریثمتیکا وام گرفته است.

آنچه می‌توانیم در مورد حل کردن معادلات درجهٔ دوم توسط دیوفانتوس و کرجی بگوییم این است که راه‌حل هر دو مبتنی بر مفاهیم بنیادی مشترک و فرآیندهای متداول جبر یونانی و دورهٔ اسلامی است. نقل مطالب توسط یکی از قول دیگری از هیچ زنجیره‌ای از متون ناشی نمی‌شود، بلکه بیشتر ناشی از سنت شفاهی است که ظاهراً در سراسر دنیای قدیم رواج داشته و ردپایش در متن‌هایی که به دست ما رسیده به‌جا مانده است. با این ذهنیت است که تغییر قواعد برای حل معادلات ما را قادر می‌سازد تا قواعد کرجی را مرتب کرده و روش گمشدهٔ دیوفانتوس را تبیین کنیم.

کلید واژه‌ها: دیوفانتوس، کرجی، جبر پیش‌مدرن، معادلات درجهٔ دوم.

---

۱. این مقاله ترجمه‌ایست از:
Oaks, J. A., "Diophantus, al-Karajī, and Quadratic Equations", *Science, Technology, and Medicine in Ancient Cultures*, vol. 8 (2018), pp. 271- 294.

۲. استاد ریاضیات در دانشگاه ایندیاناپلیس، oaks@unidy.edu

۳. پژوهشگر تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی، mahkavyzd@yahoo.com

4. *Arithmetica*

۱. مقدمه

دیوفانتوس در یک نقل‌قول مشهور در مقدمهٔ کتاب اریثمتیکا قول می‌دهد که راه حل معادلات درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای را توضیح دهد: «بعداً هم چگونگی حل حالتی را که در آن دو جمله برابر با یک جمله گرفته می‌شود به شما نشان خواهم داد.» قاعدهٔ کلی در هیچ بخشی از این کتاب او، به یونانی یا عربی، یافت نمی‌شود. اما او معادلات درجهٔ دوم را در مقالات یونانی چهارم تا ششم حل می‌کند و در دو مورد قاعدهٔ محاسبهٔ آن را بیان می‌کند.

قواعدی که دیوفانتوس دنبال کرده، قواعد استاندارد حل معادلات درجهٔ دوم در جبر دورهٔ اسلامی نیست. تفاوت در این واقعیت است که در جبر دورهٔ اسلامی، ابتدا معادله به صورت متعارف در می‌آید؛ یعنی ضریب جملهٔ مربع یک می‌شود؛ در حالی که در قواعد دیوفانتوس احتیاجی به متعارف کردن معادله نیست. این تفاوت هنگامی اهمیت پیدا می‌کند که به کتاب جبر کرجی، الفخري، مراجعه کنیم. کرجی به شدت وامدار دیوفانتوس است. او هم قواعد معمول جبر دورهٔ اسلامی و هم قواعدی را که از دیوفانتوس گرفته است بی آنکه نامی از او ببرد، عرضه می‌کند. کرجی بعد از اثبات هندسی خود فرایند دیگری را برای دو نوع معادله بر اساس تکمیل به مربع عرضه می‌کند و آن را «روش دیوفانتوس» می‌نامد. اما این روش‌ها در هیچ کجای مقالات موجود کتاب اریثمتیکا اعمال نشده‌اند. بنابراین سازگاری و تطبیق این دو فرایند دیوفانتوس دشوار است.

با خواندن راه‌حل‌های مسائل در سه مقالهٔ او، ادعا می‌کنم که کرجی قواعد حل معادلات درجهٔ دوم غیر متعارف را از کتاب اریثمتیکا آموخته است. در اثر کمتر مطالعه شدهٔ او، علل حساب الجبر والمقابلة وشرحها والبراهين عليه، هم «روش دیوفانتوس» به اثباتی برای قاعدهٔ معمول جبر دورهٔ اسلامی برای هر نوع معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود. این مرا به این سمت سوق می‌دهد که بپذیرم دیوفانتوس در جایی بین مقالهٔ هفتم و مقالهٔ یونانی چهارم قواعد خود را برای حل معادلات غیرمتعارف از طریق این «روش دیوفانتوس» استخراج کرده است.

اظهار این‌که دیوفانتوس و کرجی هر دو معادلات درجهٔ دوم را حل کرده‌اند و این‌که دومی آن قواعد را از اولی وام گرفته است، به طور ضمنی، این دو ریاضیدان را در جایگاه‌های مشابهی قرار می‌دهد. مجموعه‌ای از مقالات اخیر نشان داده است که اگرچه ساختار و مفاهیم اساسی جبر دورهٔ اسلامی با مفاهیم جبر مقدماتی امروزی تفاوت اساسی دارد، اما با آنچه در کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس آمده بسیار مطابقت دارد. به همین دلیل برای متمایز ساختن جبر امروزی از روش معمول دیوفانتوس و نویسندگان مسلمان از مورد اخیر با عنوان «جبر پیش‌مدرن» یاد می‌کنیم. پس باید مراقب تمایز معادلات پیش‌مدرن در آثار دیوفانتوس و کرجی از یک طرف و معادلات امروزی از طرف دیگر باشیم.

همسانی بین واژگان و قواعد و مفاهیمی که دیوفانتوس به کار برده با نظایر آن‌ها در جبر دورهٔ

اسلامی نشانگر پیوند تاریخی خیلی قوی بین آن‌هاست. متأسفانه متـون مشـابهی مـرتبط بـا حـوزهٔ علمی اسکندریه و بغداد نداریم، اما این دلیلی برای رد ایـن ادعـا نیسـت. جبـر پـیش‌مـدرن قبـل از این‌که خوارزمی و ابن ترک اولـین کتـاب‌هـا را در زمینـهٔ آن بنویسـند بـه صـورت شـفاهی در میـان گروه‌های حرفه‌ای منتشر شده بود. بنابراین کاملاً قابل قبول است که این روش فقط در کتاب‌هـا (بـه اندازهٔ کافی) نوشته نشده بود تا اثری را که دوست داریم در میان جامعهٔ علمی بـاقی گـذارد. اگـر در واقع یک سنت مداوم در حل مسئلهٔ جبری وجود داشته است که دیوفانتوس و کرجـی از آن اسـتفاده کرده‌اند، این ناپیوستگی اتفاقی جایی در امتداد مسیر روش‌های خاص حل معادلات درجـهٔ دوم رخ داده است که به ما اجازه می‌دهد درک خود را از تأثیرات دیوفانتوس بر کرجـی اصـلاح کنـیم و روش دیوفانتوس را برای استخراج قواعدش پیشنهاد کنیم.

من ویژگی‌های اساسی جبر پیش‌مدرن را در بخش دوم مقاله عرضـه مـی‌کـنم. در بخـش سـوم، کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس و کتاب الكامل في الجبر والمقابلة ابوکامل را توصیف می‌کنم که تـأثیر اصلی را بر کرجی و در نتیجه بر الفخري داشته‌انـد. معـادلات درجـهٔ دوم در جبـر دیوفـانتوس و در جبر دورهٔ اسلامی تا الفخري کرجی بخش‌های چهارم تا ششم مقالـهٔ حاضـر را تشـکیل می‌دهنـد. بخش‌های مربوط به سایر آثار کرجی در بخش‌های هفتم و هشتم بررسـی مـی‌شـوند و نتیجـهٔ همـهٔ آن‌ها در بخش پایانی، بخش نهم، آمده است.

۲. جبر پیش‌مدرن

جبر دورهٔ اسلامی یک روش عددی برای مسئله حل کردن بود که، از نظر ساختار و مفاهیم، متفاوت از جبر امروزی است. مروری کوتاه در این بخش عناصر حیاتی جبر دورهٔ اسلامی و جبر پیش‌مدرن را شامل می‌شود.

در هر دوی اریثمتیکای دیوفانتوس و جبر دورهٔ اسلامی نام‌هایی برای توان‌های مجهولات عرضه شده بود. نام‌های چند توان نخست در جبر یونانی و دورهٔ اسلامی با نمادهای امروزی در جدول زیر آمده است:

دیوفانتوس	اسلامی	مدرن
موناس (monas) - واحد	درهم (سکهٔ نقره) عدد، یا احد	۱
آریتموس (arithmos) - عدد	جذر یا شئ	x
دینامیس (dynamis) - توان	مال	x^2
کیبوس (kybos) - مکعب	کعب	x^3
دینامودینامیس (dynamodynamis)	مال المال	x^4

معادلات مبتنی بر این نام‌ها هستند، مثلاً دیوفانتوس می‌گوید: یک دینامیس و شانزده واحد بجز هشت آریتموس مساوی است با یک دینامیس و دوازده واحد. این معادله با عبارات امروزین چنین نوشته می‌شود:

$$x^2 + 16 - 8x = x^2 + 12$$

یک مثال از جبر دورهٔ اسلامی، معادله‌ای از کتاب في الجبر و المقابلة ابوکامل است: إثنین وستین شیئاً ونصف شئ الّا أربعة أموال وربع مالٍ. تعدل مائة درهم ومالین. بیان متناظر آن در جبر امروزی چنین است:

$$62\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{4}x^2 = 100 + 2x^2$$

چندجمله‌ای‌های پیش‌مدرن و بنابراین معادلات نیز مانند همتایان امروزی آن‌ها تصور نمی‌شدند. چندجمله‌ای‌ها در متون یونانی و اسلامی به جای یک ترکیب خطی حاصل شده از اعمالی مانند جمع، تفریق، ضرب و توان، به عنوان مجموعه‌ای از نام‌های توان‌ها، بدون هیچگونه عملیاتی در نظر گرفته می‌شدند. برای مثال عبارت «یک دینامیس و دوازده واحد» دیوفانتوس مجموعه‌ای از سیزده شئ از دو نوع در نظر گرفته می‌شود؛ مانند آن‌که گفته شود: یک میز و دوازده صندلی. من برای راحتی کار اغلب عبارات و معادلات جبری پیش‌مدرن را با نمادهای امروزی نشان می‌دهم، اما برای درک درست آن‌ها باید الفاظ مربوط به جبر پیش‌مدرن را در خاطر نگاه داشت.

دیوفانتوس از خواننده می‌خواهد تا معادلات را در دو مرحله ساده کند: ۱. اضافه کردن جملاتی که در یک طرف معادله کم شده‌اند به هر دو طرف معادله یا کم کردن جملاتی که به یک طرف معادله اضافه شده‌اند از دو طرف معادله؛ ۲. حذف جملات متشابه از دو طرف معادله. اینها همان مراحلی است که در جبر دورهٔ اسلامی هم انجام می‌شده و «جبر» و «مقابله» نامیده می‌شده‌اند.

قواعد حل معادلات ساده شده، اعداد جملات (یعنی ضرایب جملات) را به عنوان پارامتر در نظر می‌گیرند؛ و از آن‌جا که فقط اعداد مثبت به رسمیت شناخته می‌شد، در متون اسلامی فقط شش نوع معادلهٔ ساده طبقه‌بندی شده است. این معادلات به ترتیبی که در الفخري کرجی آمده به قرار زیر است:

معادلات مفرده (ساده)	معادلات مقترنه (مرکب)
۱. اشیاء معادل عدد: $bx = c$	۱. اموال و اشیاء معادل عدد: $ax^2 + bx = c$
۲. اموال معادل اشیاء: $ax^2 = bx$	۲. اموال و عدد معادل اشیاء: $ax^2 + c = bx$
۳. اموال معادل عدد: $ax^2 = c$	۳. اشیاء و عدد معادل اموال: $bx + c = ax^2$

برای هر نوع معادله راه‌حل خاص آن عرضه شده است و این راه‌حل‌ها در بسیاری از کتاب‌ها با اثبات‌های هندسی همراهند.

برای حل یک مسئله به کمک جبر، گاهی یک و گاهی بیش از یک کمیت مجهول لازم است که به نام‌های معینی خوانده می‌شوند. شرایط داده شده در مسئله، به معادلهٔ مشخصی بر حسب این نام‌ها منجر می‌شود که در مرحلهٔ بعد ساده و سپس حل می‌شود. در اینجا یک مسئلهٔ معین ساده از کتاب المقدمة الکافیة في حساب الجبر والمقابلة وما یعرف به قیاسه من الأمثلة از علی سُلَمی عرضه می‌شود:[۱]

[شرایط داده شده]

اگر کسی بگوید: کمیتی (مقدار معینی وجه نقد) هست که اگر درهمی به آن اضافه کنی، حاصل جذر خواهد داشت؛ و اگر یک درهم هم از آن کم کنی، باز حاصل جذر خواهد داشت.

[ساختن معادله]

کمیت مجهول را یک مال و یک درهم در نظر بگیر: x^2+1؛ تا اگر از آن یک درهم کم کنی، باقیمانده جذر داشته باشد که همان مال اولیه است. پس به آن یک درهم اضافه کن تا مال و دو درهم باشد: x^2+2. پس جستجو کن یک ریشه برای این. پس اگر تو آن ریشه را یک شئ و یک درهم بگیری، $x+1$، باید آن را در خودش ضرب کنی تا مال و دو شئ و یک درهم شود:

$$x^2+2x+1$$

این معادل با مال و دو درهم است:

$$x^2+2x+1=x^2+2$$

[ساده کردن و حل معادله]

مال را با مال و یک درهم را با یک درهم حذف کن. پس یک درهم معادل دو شئ باقی می‌ماند:

$$1=2x$$

شئ یک دوم و مال یک چهارم است. بنابراین مال و یک درهم برابر با یک و یک چهارم درهم است. پس این آن چیزی بود که می‌خواستیم.[۲]

[راه‌حل دیگر]

۱. نسخهٔ واتیکان ۵ Sbath، گ ۵۰پ، سطر ۳.

۲. در این صورت کمیت مجهول $\frac{5}{4}$ است که با افزودن و کاستن یک واحد به ترتیب $\frac{9}{4}$ و $\frac{1}{4}$ می‌شود.

و اگر جذر عدد مطلوب[۱] را یک شئ و نصف درهم فرض کنی: $x+\frac{1}{2}$؛ پس مقدار جذر، x، یک و نصف و ربع $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}]$ و مال برابر با سه و نصف ثمن $[3\frac{1}{16}]$ است و با اضافه کردن یک درهم به آن، چهار و نصف ثمن می‌شود، که همان مقدار مطلوب است.[۲]

در راه‌حل اول، کمیت «یک مال و یک درهم»، x^2+1، و جذر مربع بزرگتر «یک شئ و یک درهم»، $x+1$، نامیده می‌شود و در نتیجه حل مسئله منجر به حل معادلهٔ

$$x^2+2x+1=x^2+2$$

می‌شود. سپس این معادله ساده و حل می‌شود. دومین راه‌حل فرایند مشابهی دارد.

ساختار مشابهی برای مسائل اریثمتیکای دیوفانتوس نیز وجود دارد. مسئلهٔ اول مقالهٔ اول مثالی از یک معادلهٔ سادهٔ معین است. صورت مسئله عبارت است از: تقسیم عددی مفروض به دو جزء به طوری که دارای تفاوت معینی باشند. فرض کنید عدد مفروض ۱۰۰ و تفاضل دو مقدار ۴۰ باشد. برای به دست آوردن دو عدد، کوچکترین عدد «یک آریتموس»، x، نامیده می‌شود و معادله به صورت «صد واحد مساوی است با دو آریتموس و چهل واحد» $[100=2x+40]$ تنظیم می‌شود. سپس این معادله ساده و حل می‌شود.

به گفتهٔ نویسندگان مسلمان هدف از جبر یافتن اعداد مجهول، یعنی حل مسائل است. به همین ترتیب، راه و طریق دیوفانتوس روشی برای حل مسائل است. در هر دو حالت، این روش شامل نامگذاری مجهول یا مجهولات بر حسب نام‌های از پیش تعیین شده برای توان‌هاست. سپس اعمال کردن معلومات مسئله برای تشکیل و ایجاد معادله‌ای بر حسب این نام‌هاست. این معادله سپس ساده و حل می‌شود. این روش اصلی، با همان تفسیر از جمع جبری چندجمله‌ای‌ها، در هر دو اثر، اریثمتیکای دیوفانتوس و جبر دورهٔ اسلامی، مشترک است. این روشی است که من، در این مقاله با عنوان «جبر» ذکر می‌کنم.

---

۱. یعنی جذر x^2+2.

۲. اگر جذر مورد نظر را $x+\frac{1}{2}$ در نظر بگیریم، مانند حالت اول داریم:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+2\rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=x^2+2\rightarrow x=\frac{7}{4}\rightarrow x^2+1=\left(\frac{7}{4}\right)^2+1=\frac{65}{16}$$

پس مقدار پول نقد اولیه $4\frac{1}{16}$ درهم است. حال اگر یک درهم از آن کم کنیم، $3\frac{1}{16}$ درهم می‌شود که جذر آن $1\frac{3}{4}$ درهم است. و اگر یک درهم به آن اضافه کنیم، $5\frac{1}{16}$ درهم می‌شود که جذر آن $2\frac{1}{4}$ درهم است. م

۳. دیوفانتوس، ابوکامل و کرجی

دو اثر تأثیرگذار بر الفخري کرجی، اریثمتیکای دیوفانتوس و کتاب الکامل في الجبر والمقابلهٔ ابوکامل هستند.[۱] این سه اثر در اینجا، به ترتیب زمانی، توصیف می‌شوند:

دیوفانتوس اسکندرانی کتاب اریثمتیکای خود را به یونانی در اواخر دوران باستان، احتمالاً در قرن چهارم میلادی، نوشته است. شش مقاله از سیزده مقالهٔ اصلی کتاب که به زبان یونانی بوده، موجود هستند: مقالات اول تا سوم و سه مقالهٔ دیگر که بعد از مقالهٔ هفتم آمده‌اند. من کتاب سزیانو[۲] را، که شامل مقالات چهارم تا ششم است، دنبال می‌کنم که نقل‌قول‌ها و شماره‌گذاری آن‌ها در دورهٔ نوزایی را حفظ کرده است. کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس در اواسط قرن سوم هجری توسط قسطا بن لوقا به عربی ترجمه شده است. چون روش دیوفانتوس از نظر ساختاری و مفهومی با جبر دورهٔ اسلامی سازگار است، قسطا بن لوقا مقالات دیوفانتوس را با استفاده از اصطلاحات جبری زمان خود ترجمه کرده و فقط مقالات چهارم تا هفتم از این ترجمه باقی مانده است.[۳]

دیوفانتوس در مقدمهٔ کتابش اصطلاحات و قواعد را، به ترتیبی که در حل مسائل به کار می‌روند، مرور می‌کند. وی با اصطلاحاتی که در میان مسائل ظاهر می‌شوند، شروع می‌کند و سپس نام توان‌ها را تا درجهٔ شش و برعکس آن‌ها را می‌آورد، و نحوهٔ ضرب آن‌ها را توضیح می‌دهد. به دنبال این، توضیح مختصری در مورد اعمال بر چندجمله‌ای‌ها و چگونگی تنظیم و ساده‌سازی معادلات را عرضه می‌کند. در این مرحله است که او می‌گوید بعداً نشان خواهد داد که معادلات سه‌جمله‌ای چگونه حل می‌شوند. بقیهٔ رسالهٔ موجود شامل مسائل حل شده است.

ابوکامل در اواخر قرن نهم در مصر کار می‌کرد. کتابش در جبر، کتاب الکامل في الجبر والمقابلة، بر اساس کتاب المختصر فی حساب الجبر والمقابلهٔ خوارزمی تدوین شده و در بغداد در حدود ۱۹۷- ۲۱۸م نوشته شده است. این دو رساله با آنچه من "جبر محض" می‌نامم آغاز شده است که به دو بخش تقسیم می‌شود. اولین بخش شامل تعاریف و قواعد ضروری برای حل مجموعه‌ای از مسائل حل شده در بخش دوم است. در هر دو کتاب قسمت اول به ترتیب نام‌های اولین دو توان، طبقه‌بندی معادلات، راه‌حل‌ها، و اثبات شش معادلهٔ ساده شده، و اعمال بر چندجمله‌ای‌ها و ریشه‌ها را پوشش می‌دهد. متن کتاب جبر ابوکامل شامل قوانین، مثال‌ها و

---

۱. کرجی تنها در دو مورد هنگام توضیح «روش دیوفانتوس» از وی نام می‌برد؛ اما هرگز از ابوکامل نامی نمی‌برد.

2. Sesiano, J.: Books IV to VII of Diophantus’ Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qusṭā ibn Lūqā, 1982, New York.

۳. کتاب پل تانری (Tannery 1893- 1895) شامل متن تصحیح شدهٔ یونانی است. متن تصحیح شدهٔ ترجمهٔ عربی کتاب در آثار سزیانو (Sesiano 1982) و رشدی راشد (Rashed 1984) آمده است.

Diophantus: Tannery, P. 1893–1895. *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graeciis Commentariis*. Leipzig. (repr. Stuttgart: 1974).
Rashed, R. (ed.) 1984. *Les Arithmétiques*. Paris.

برهان‌های بیشتری نسبت به جبر خوارزمی است. خوارزمی در بخش دوم جبر محض، ۳۹ مسئلهٔ حل‌شده دارد، ولی ابوکامل ۷۴ مسئله آورده است.

در هر دو کتاب، جبر محض با مطالب مرتبط دنبال می‌شود. خوارزمی فصل‌هایی در مورد مساحی، معاملات و مقاله‌ای گسترده شامل مسائلی در فرائض به کتاب خود اضافه کرده است که به روش جبر و مقابله حل شده‌اند. ابوکامل به جبر محض خود مقاله‌ای مشتمل بر ۲۰ مسئلهٔ هندسی (دربارهٔ پنج‌ضلعی‌ها و ده‌ضلعی‌ها) که بیشتر آن‌ها به وسیلهٔ جبر حل می‌شوند، افزوده و سپس مجموعه‌ای شامل ۸۴ مسئلهٔ مختلف را که بسیاری از آن‌ها معادلات نامعین (سیاله) هستند و با جبر حل می‌شوند، آورده است.

ابوبکر بن محمد بن حسن کرجی اواخر قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری در بغداد کار می‌کرد. اثر مهم او در جبر، کتاب الفخري في صناعة الجبر والمقابلة تألیف شده که در سال ۴۰۱ق است. سازماندهی کلی کتاب از کتاب جبر ابوکامل الگوبرداری شده و با قوانین جبر آغاز شده و در پی آن مجموعه‌ای از مسائل حل شده آمده است. او برخی تغییرات را در سازماندهی قواعد ایجاد کرده که بخشی از آن بر اساس مقدمهٔ دیوفانتوس است. کرجی به جای عرضهٔ تنها دو توان اول، چنان که خوارزمی و ابوکامل انجام داده‌اند، نام توان‌ها را تا درجهٔ نهم و همچنین وارون آن‌ها را ذکر می‌کند؛ و در جایی که کتاب‌های جبر عربی قبلی به سراغ معادلات می‌روند، وی با مثال‌های متعددی روی اعمال بر چندجمله‌ای‌ها و ریشه‌ها و بخشی مربوط به مجموع سری‌ها، و برخی قضیه‌ها در علم حساب کار را ادامه می‌دهد.

در این مرحله، کرجی مراحل حل مسائل را به کمک جبر، شامل نام‌گذاری مجهولات، اِعمال شرایط اعلام شده روی مجهولات برای تشکیل معادله، و ساده کردن معادله را توضیح می‌دهد. این امر مستقیماً منجر به طبقه‌بندی، روش حل، و اثبات شش معادلهٔ جبری می‌شود. وی بخش اول کتاب خود را با برخی نکات در مورد تنظیم معادلات برای مسائل نامعین به پایان می‌رساند.

کرجی سپس ۲۵۵ مسئلهٔ حل شده را، که در پنج گروه دسته‌بندی شده‌اند، عرضه می‌کند. بیش از ۱۰۰ عدد از این مسائل از کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس گرفته شده است و به نظر می‌رسد که برخی دیگر از آن مسائل صورت تغییر یافتهٔ مسائل دیگری از دیوفانتوس باشند.[1] مسائل زیادی هم از کتاب ابوکامل گرفته شده است. بیست و دو تا از این مسائل مستقیماً از آنجا گرفته شده است و به نظر می‌رسد که چهارده مورد دیگر صورت تغییر یافتهٔ مسائل کتاب الكامل في الجبر والمقابلة باشند. این وام گرفتن‌ها زمانی بیشتر آشکار می‌شود که مسائل با همان ترتیبی که در منبع اصلی آمده در اینجا هم ذکر شده‌اند. مسائل ۱۸ تا ۲۲ ابوکامل، به ترتیب، به عنوان مسائل ۱۲ تا ۱۶ بخش

۱. سزیانو می‌گوید تقریباً تمامی مقالهٔ چهارم در الفخری نقل شده است (سزیانو، ۱۹۸۲، ص ۱۰).

سوم کتاب کرجی هستند؛ با این تفاوت که مسئلهٔ ۲۱ با تغییر جزئی در صورت آن آورده شده است. همچنین مسائل ۵۷ تا ۵۹ ابوکامل به همان صورت به عنوان مسائل ۲۱ تا ۲۳ مقالهٔ چهارم کتاب کرجی هستند. کرجی مانند پیشینیانش ابوکامل و خوارزمی، مسائلی را از منابع دیگر گرفته و احتمالاً برخی را خودش ابداع کرده است.

سه اثر دیگر کرجی، که همهٔ آن‌ها پس از الفخري نوشته شده‌اند، و در این مقاله از آن‌ها صحبت خواهد شد؛ عبارتند از:

- البديع في الحساب: این کتاب شامل مباحثی در نظریهٔ اعداد، محاسبات با چندجمله‌ای‌ها و راه‌حل‌های جبری برای معادلات معین و سیاله است.
- الكافي في الحساب: کتابی است در زمینهٔ حساب و اندازه‌گیری با یک فصل گستردهٔ پایانی در جبر.
- علل حساب الجبر والمقابلة وشرحها والبراهين عليه: اثری کوتاه که شامل اثبات‌های حسابی راه‌حل‌های معادلات و قواعد برای اعمال بر روی ریشه‌هاست.

۴. معادلات درجهٔ دوم در *اریثمتیکای* دیوفانتوس

دیوفانتوس در مقدمهٔ خود می‌نویسد که: «باید معادلات را مرتب و ساده کرد، به طوری که هرگاه امکان داشت، یک جمله معادل با یک جمله باقی بماند. بعداً به شما نشان خواهم داد که چگونه حالتی را که در آن دو جملهٔ باقیمانده مساوی با یک جمله است حل کنید.» توضیحات قول داده شده در مقاله‌های به جا مانده، چه به یونانی و چه عربی، وجود ندارد. اما دیوفانتوس معادلات سه‌جمله‌ای را در مقالات چهارم تا ششم متن یونانی حل می‌کند. در هر حالت او بدون نشان دادن محاسبات به سادگی جواب را عرضه می‌کند. برای مثال در مسئلهٔ نهم مقالهٔ ششم آورده است: ۶۳۰ دینامیس بجز ۷۳ آریتموس معادل با شش واحد که از آنجا نتیجه می‌شود آریتموس برابر است با $\frac{6}{35}$.

اما در آنجا دو مسئله وجود دارد که در آن محاسبات برای حل یک نامساوی، که به عنوان معادله تلقی می‌شود، انجام می‌گیرد. اولین مسئله، مسئلهٔ ۳۹ مقالهٔ چهارم است که دیوفانتوس آن را با نامعادلهٔ $2x^2 > 6x + 18$ نشان داده است:

وقتی این را به عنوان یک معادله حل می‌کنیم، نصف آریتموس‌ها را در خودش ضرب می‌کنیم، که ۹ می‌شود و عدد ۲ از دینامیس‌ها را در ۱۸ واحد ضرب می‌کنیم، که ۳۶ می‌شود. این را به ۹ اضافه می‌کنیم، ۴۵ می‌شود، که جذر آن ناکمتر از ۷ است. نصف آریتموس‌ها را به آن اضافه می‌کنیم، [که ناکمتر از ۱۰ می‌شود. حاصل را بر عدد دینامیس‌ها تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت] ناکمتر از ۵ واحد می‌شود.[1]

۱. دیوفانتوس در پی یافتن جواب صحیح برای نامساوی است، پس x باید حداقل ۵ باشد.

اگر بخواهیم این قانون را به یک دستور امروزی برای حل معادلهٔ $ax^2 = bx + c$ برگردانیم، چیزی شبیه به این می‌شود:

$$x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + ac} + \frac{1}{2}b\right]$$

یک تفاوت اساسی بین روش دیوفانتوس و دستور امروزی این است که مورد اول دنباله‌ای از عملیات است که با نصف کردن آریتموس‌ها شروع می‌شود؛ در حالی که در دومی همهٔ آن‌ها همزمان با نمادهای امروزی جبر بیان می‌شود. به عبارت دیگر یکی به صورت شفاهی بیان می‌شود در حالی که دیگری آن را نمایش می‌دهد.

مثال دوم در مسئلهٔ دهم مقالهٔ پنجم و در مورد نامعادله‌ای با نماد امروزی زیر است:

$$72x > 17x^2 + 17$$

نصف آریتموس‌ها را در خودش ضرب می‌کنیم، ۱۲۹۶ می‌شود. حاصل‌ضرب عدد دینامیس‌ها و موناس‌ها را که ۲۸۹ می‌شود، از آن کم می‌کنیم، ۱۰۰۷ باقی می‌ماند. جذر آن نابیشتر از ۳۱ است. با اضافه کردن نصف آریتموس‌ها به این ریشه؛ حاصل نابیشتر از ۶۷ است. با تقسیم این، بر عدد دینامیس‌ها نتیجه می‌شود که آن نابیشتر از $\frac{67}{17}$ است.

صورت امروزی جواب معادلهٔ $ax^2 + c = bx$ چنین است:

$$x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - ac} + \frac{1}{2}b\right]$$

در دو مسئلهٔ دیگر، مسئلهٔ ششم مقالهٔ ششم و مسئلهٔ بیست و دوم مقالهٔ ششم، دیوفانتوس توضیح می‌دهد که جذر مبیّن معادله باید گویا باشد و محاسبهٔ آن با دو جواب عرضه شده مطابقت دارد. در مورد معادلهٔ $6x^2 + 3x = 7$ در مسئلهٔ ششم مقالهٔ ششم می‌نویسد: «باید نصف مقدار آریتموس‌ها که در خودش ضرب شده و به حاصل‌ضرب عدد دینامیس‌ها و موناس‌ها اضافه شده، تشکیل یک مربع بدهد.» با نمادهای امروزین باید $\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + ac}$ گویا باشد. در مورد معادلهٔ $172x = 336x^2 + 24$ در مسئلهٔ ۲۲ مقالهٔ ششم می‌گوید: «این مسئله جواب [گویا] ندارد اگر نصف مقدار آریتموس‌ها که در خودش ضرب شود و از این، حاصل‌ضرب عدد دینامیس‌ها در

مونانس‌ها کم شود، تشکیل یک مربع ندهد»[1]. با نمادهای امروزی $\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - ac}$ باید گویا باشد.

دیوفانتوس باید راه‌حل‌های معادلات درجهٔ دوم را در جایی بین مقالهٔ هفتم و قسمت موجود مقالهٔ چهارم توضیح داده باشد. دستورالعمل او در مقدمه، یعنی «افزودن جملات کم شده به هر دو طرف» و «کم کردن جملات متشابه در هر دو طرف» نشان می‌دهد که معادلات مقترنهٔ طبقه‌بندی شده نزد وی منحصر به همان سه نوع معادله‌ای است که در متون اسلامی موجود است. اینکه برای هر یک از این‌ها راه‌حل جداگانه‌ای داده شده است با تغییر در جمع یا تفریق در قواعدی که او در نقل‌قول‌های ترجمه شده از مسئلهٔ ۳۹ مقالهٔ چهارم و مسئلهٔ ۱۰ مقالهٔ پنجم و مسئله‌های ۶ و ۲۲ مقالهٔ ششم دنبال کرده است، تأیید می‌شود.

۵. معادلات درجهٔ دوم در جبر دورهٔ اسلامی پیش از کرجی

قواعد دیوفانتوس برای حل معادلات سه‌جمله‌ای همان قواعد متعارف در جبر دورهٔ اسلامی نیستند. در قواعد جبر دورهٔ اسلامی معادله ابتدا باید بهنجار شود، یعنی ضریب جملهٔ بالاترین درجه یک شود. برای مثال خوارزمی برای حل معادلهٔ «نصف یک ششم مال معادل با شئ و بیست و چهار درهم» ($\frac{1}{12}x^2 = x + 24$) می‌گوید:

ضرب کن نصف یک ششم مال را در دوازده تا مال کامل شود؛ و ضرب کن شئ را در دوازده، تا دوازده شئ شود؛ و ضرب کن بیست و چهار را در دوازده، تا دویست و هشتاد و هشت درهم و دوازده شئ معادل مال شود:

$$288 + 12x = x^2$$

نصف کن عدد اشیاء را تا شش حاصل شود و ضرب کن آن را در خودش و اضافه کن این را به دویست و هشتاد و هشت تا کلاً سیصد و بیست و چهار شود. پس جذر آن را استخراج کن، که هجده است. آن را به نصف عدد اشیاء، که شش است، اضافه کن؛ تا بیست و چهار به دست آید که مقدار مجهول است.[2]

با نمادهای امروزی جواب معادلهٔ بهنجار شدهٔ $x^2 = bx + c$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + c} + \frac{1}{2}b$$

۱. در این مورد جواب گنگ هم وجود ندارد زیرا مبین معادلهٔ منفی است.

۲. حل این معادله به روش دیوفانتوس آسان‌تر است زیرا مبین $2\frac{1}{4}$ و جذرش $1\frac{1}{2}$ است.

بهنجار کردن معادله به دو صورت انجام می‌شود:

اگر تعداد مال‌ها کمتر از یک باشد، پس کسر مال «تکمیل» می‌شود؛ همچنان که خوارزمی در متن بالا انجام داد. اگر تعداد مال‌ها بیشتر از یک باشد، پس «رد» می‌شود به یک مال. خوارزمی، ابوکامل و کرجی و اکثر جبردانان هنگام توضیح چگونگی حل معادلات درجهٔ دوم مثال‌هایی از هر دو نوع بالا عرضه کرده‌اند.

این روش که پیش از به کار بردن الگوریتم، معادله بهنجار شود؛ در منابع جبر دورهٔ اسلامی به کار رفته است. این قانون در اکثر کتاب‌های موجود قبل از کرجی و در همهٔ کتاب‌های تألیف شدهٔ پس از او که دیده‌ام آمده است.[۱] متأخرترین مثالی که می‌شناسم فرائد عوائد جبریة علیٰ شرح السبط للیاسمینیة نگاشتهٔ محمد بن سالم حفنی (م. ۱۱۸۱ق) است.[۲]

ابوکامل تنها جبردان پیش از کرجی است که کوشید تا قواعدی برای حل معادلات عرضه کند. او برای هر نوع معادله ابتدا قاعدهٔ متعارف را عرضه می‌کند که با قاعده‌ای برای پیداکردن مستقیم مال دنبال شده است. در این قواعد نیز معادله باید بهنجار شود. در اینجا راه‌حل او را برای یافتن مال برای معادلهٔ «سه شئ و چهار عدد معادل مال» است ($3x + 4 = x^2$) می‌آوریم:

و راهی که از طریق آن مال را پیدا می‌کنی چنین است: عدد اشیاء را در خودش ضرب کن، نه به دست می‌آید. و این نه را در چهار درهم، که با اشیاء است، ضرب کن؛ سی و شش می‌شود. سپس نه را نصف کن، چهار و یک دوم به دست می‌آید. این را در خودش ضرب کن، بیست و چهار و یک چهارم می‌شود. و این را به سی و شش اضافه کن، پنجاه و شش و یک چهارم می‌شود. جذر آن را استخراج کن، هفت و یک دوم می‌شود. این را به چهار و یک دوم، که نصف نه بود، و به چهار درهم، که با اشیاء بود، اضافه کن، شانزده می‌شود که مقدار مال است.

صورت امروزی راه‌حل فوق، برای به دست آوردن مقدار x^2 در معادلهٔ $x^2 = bx + c$ چنین است:

$$x^2 = \sqrt{b^2c + \left(\frac{1}{2}b^2\right)^2} + \frac{1}{2}b^2 + c$$

این قاعده باید در حالاتی ترجیح داده شود که منظور یافتن مال (مجذور x) باشد. اما ابوکامل آن را تنها در سه مسئلهٔ مقدماتی طرح شده برای نشان دادن راه‌حل‌های معادلات درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای به کار برده و در آنجا هم نخست «شئ» را به روش متعارف یافته است. او آن را عملاً

۱. یعنی در کتاب‌های جبر خوارزمی، ابوکامل، علی سلمی، سنان بن فتح. درآثار دیگران مثل ابن ترک، معاصر خوارزمی، و پس از او ثابت بن قره که اثبات‌ها برای صورت بهنجار شدهٔ معادلات آمده است.
۲. حفنی از واژهٔ «جبر» و «حطّ» به جای «جبر و مقابله» استفاده کرده است.

یعنی در ۶۸ مسئلهٔ باقیمانده در جبر محض یا مسائلی که آن‌ها را بعداً در کتابش حل کـرده بـه کـار نبرده است، به ویژه، در شش مسئله‌ای که یافتن مال مورد نظر است، ابوکامل از طریق راه‌حل معادلهٔ سه‌جمله‌ای ساده شده عمل کرده و برای یافتن شئ از قاعدهٔ متعارف پیروی می‌کند و با مربـع کـردن آن مال را محاسبه می‌کند.

اثبات راه‌حل معادلات درجهٔ دوم در پنج متن موجود پیش از کرجی آمده کـه همـهٔ آن‌هـا بـه شـیوهٔ هندسی عرضه شده است. خوارزمی و ابن ترک در اثبات‌هایشان «شئ» را به عنوان یک پاره‌خط و مـال را به صورت مربع بنا شده بر آن پاره‌خط در نظر گرفته‌اند. این استدلال‌ها بـه وسـیلهٔ مقایسـهٔ خطـوط و مساحت‌ها آشکار می‌شوند، بدون آن‌که به اصول اقلیدس ارجاع داده شـود. ابوکامـل اثبـاتی بـه شـیوهٔ خوارزمی عرضه می‌کند و همچنین اثبات‌ها به قضیه‌هـای پـنجم و ششـم مقالـهٔ دوم اصـول اقلیـدس استناد داده می‌شوند. ثابت بن قره نیز به قضیه‌هـای پـنجم و شـش مقالـهٔ دوم اصـول اقلیـدس متوسـل می‌شود، اما اثبات او مرحله به مرحله به صورت شفاهی و به سبک معطیات اقلیـدس بیـان مـی‌شـود. سرانجام نعیم بن موسی بن محمد بن موسی راه‌حل‌های معادلات درجهٔ دوم نوع اول و دوم را به بیان شفاهی، امـا این بار با به کار بردن قضایای مقالهٔ ششم و همچنین قضیهٔ پنجم مقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس اثبات کرد. هیچ نشانه‌ای وجود ندارد که کرجی از آثار ثابت بن قره یا نعیم بن موسی اطلاع داشته است.

۶. معادلات درجهٔ دوم در *الفخری* کرجی

کرجی معادلات درجهٔ دوم را در فصلی تحت عنوان «باب ذکر المسـائل السـت»، یعنـی معـادلات ششگانه، حل کرده است. وی برای هر نوع، ابتـدا قاعـدهٔ متعـارف را عرضـه مـی‌کنـد (شـمارهٔ ۱ در ترجمهٔ زیر)؛ بعد قاعده‌ای برای حل حالت نابهنجار از اریثمتیکای دیوفانتوس می‌آورد (شمارهٔ ۲)[۱]؛ و سپس راه‌حل ابوکامل برای پیداکردن مستقیم مال (شمارهٔ ۳) را عرضه می‌کنـد. کرجـی مثال‌هـایی بعد از هر قاعده بیان می‌کند. سپس اثبات‌هایی برای هر سه قاعده بر اساس قضایای پـنجم و ششـم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس می‌آورد. کرجی این بخش از کتاب را با اولین دو معادلهٔ مقترنـه و بـا آنچـه روش مورد استفادهٔ دیوفانتوس یا «روش دیوفانتوس» می‌خواند (شمارهٔ ۴) بـه پایـان مـی‌رسـاند کـه منجر به راه‌حلی جبری مبتنی بر تکمیل مربع می‌شـود. در اینجـا ترجمـهٔ کامـل راه‌حـل اولـین نـوع معادلهٔ درجهٔ دوم را که به زبان امروزی به صورت $ax^2 + bx = c$ است، می‌آوریم:

به سراغ اولین مسئله می‌رویم.[۲]

(۱) پس برای مال‌ها و اشیاء که با عدد معادل هستند، روش یافتن شئ چنین است که مال‌هـا را

۱. چنان‌که در ادامه نشان خواهم داد، این بخش برای نوع سوم از قلم افتاده است.
۲. یعنی معادلات درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای.

اگر بیش از یکی است به یک مال ردّ می‌کنی؛ یا اگر کمتر از یک مال است آن را به یک مال کامل می‌کنی، یا اگر یک مال است آن را به همان حال می‌گذاری. و هر عملی که با مال انجام می‌دهی، چه یک مال باشد، و چه بیشتر از یک مال باشد، و چه کمتر از یک مال باشد، لزوماً باید همان عمل را نسبت به اشیائی که با آن است و با عددی که معادل با آن‌هاست، انجام دهی. پس وقتی با این محاسبات مال تبدیل به یک مال شد؛ و با اِعمال آن روی همهٔ چیزهایی که با آن هست، با ردّ کردن یا تکمیل کردن یا به حال خود گذاشتن، اکنون عدد اشیاء را نصف کرده و عدد نصف شده را در خودش ضرب می‌کنی. سپس حاصل را به عدد اضافه می‌کنی و ریشهٔ مجموع را استخراج می‌کنی و از آن نصف عدد اشیاء را کم می‌کنی؛ آن‌چه باقی می‌ماند، مقدار جذر مال است.

$$x^2+bx=c \rightarrow x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2+c}-\frac{1}{2}b$$

مثال: دو مال و بیست شئ معادل صد و دوازده درهم است:

$$2x^2+20x=112$$

پس مال‌ها را به یک مال ردّ کن. پس آن را و هر آنچه با آن است را نصف کن. پس آن، یک مال و ده شئ معادل پنجاه و شش درهم می‌شود:

$$x^2+10x=56$$

عدد اشیاء را نصف کن، پنج می‌شود. آن را در خودش ضرب و به پنجاه و شش اضافه کن، هشتاد و یک می‌شود. جذر آن را استخراج کن، نُه می‌شود. نصف عدد اشیاء را از آن کم کن، چهار باقی می‌ماند، که جذر مال است، و مال شانزده است.

به همین ترتیب، اگر کسی بگوید: یک پنجم مال و دو شئ معادل پانزده درهم است:

$$\frac{1}{5}x^2+2x=15$$

حال اگر مال را کامل کنی، بعد از کامل کردن همهٔ جملات، یک مال و ده شئ معادل هفتاد و پنج درهم می‌شود.

$$x^2+10x=75$$

حال اگر نصف عدد اشیاء را در خودش ضرب کنی و آن را به عدد اضافه کنی و جذر آن را استخراج کنی و از آن نصف عدد اشیاء را کم کنی؛ باقی می‌ماند پنج، که جذر مال است.

(۲) اگر نخواهی کسری از مال را کامل کنی یا ردّ کنی مال را به یک مال، نصف عدد اشیاء را که با مال است در خودش ضرب کن، و عدد را در عدد اموال ضرب کن، و به آن مقداری را که از حاصل‌ضرب نصف عدد اشیاء در خودش حاصل شده است اضافه کن، و سپس جذر آن را

استخراج کن، و از حاصل جذر نصف عدد اشیاء را کم کن و باقیمانده را بر عدد اموال تقسیم کن؛ آنچه از این اعمال حاصل شود، جذر مال است.

$$x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + ac} - \frac{1}{2}b\right]$$

مثال: سه مال و ده شئ معادل سی و دو درهم است.

$$3x^2 + 10x = 32$$

عدد اشیاء را نصف کرده و آن را در خودش ضرب کن تا بیست و پنج به دست آید. آن را به آنچه از ضرب سی و دو در سه، که عدد اموال است، حاصل می‌شود، اضافه کن تا صد و بیست و یک حاصل شود. جذر آن را استخراج کن، و از آن نصف عدد اشیاء را کم کن، باقی می‌ماند شش. آن را بر سه، که عدد اموال است، تقسیم کن؛ دو به دست می‌آید که جذر مال است.

این روش در همهٔ مسئله‌های شامل کسرهای گوناگون آسان‌تر است، زیرا کار با این اجزاء[۱] مشکل است.

اگر کسی بگوید: یک سوم و یک چهارم مال و دو شئ معادل سی و سه درهم است:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^2 + 2x = 33$$

عدد اشیاء را نصف کن، تا یک شود. آن را در خودش ضرب کن، و آن را به آنچه از ضرب یک سوم و یک چهارم در سی و سه حاصل می‌شود، اضافه کن تا بیست و یک چهارم حاصل شود. جذر آن را استخراج کن، تا چهار و یک دوم شود. نصف عدد اشیاء را از آن کم کن، سه و یک دوم باقی می‌ماند. آن را بر یک سوم و یک چهارم تقسیم کن، شش به دست می‌آید که جذر مال است.

(۳) این مسئله می‌تواند به روش دیگری حل شود، چنان که پیش از یافتن جذر، مال به دست آید. روش عمل چنین است که بعد از ردّ و تکمیل، عدد اشیاء را در خودش ضرب می‌کنی. سپس حاصل را در عدد ضرب می‌کنی و آن را به خاطر می‌سپاری. پس از آن نصف مربع عدد اشیاء را در خودش ضرب و آن را به عدد محفوظ اضافه می‌کنی. و جذر حاصل را از مجموع عددی که معادل اموال و اشیاء بود و نصف مربع عدد اشیاء، کم می‌کنی. آنچه از این حاصل شود، مقدار مال است و جذر آن جذر مال است.

۱. در بیان کسرها، به صورت چند جزء از اجزاء مخرج از واحد گفته می‌شد، مثلاً کسر «سه یازدهم» چنین توصیف می‌شد: سه جزء از یازده جزء از واحد.

$$x^2 + bc = c \rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{2}b^2 + c\right) - \sqrt{b^2c + \left(\frac{1}{2}b^2\right)^2}$$

مثال: یک مال و پنج شئ معادل بیست و چهار درهم است:

$$x^2 + 5x = 24$$

پنج را در پنج و سپس در بیست و چهار ضرب کن تا حاصل ششصد شود. آن را در خاطر نگه دار. سپس نصف مربع پنج را، که دوازده و یک دوم است، در خودش ضرب کن تا صد و پنجاه و شش و یک چهارم حاصل شود. آن را به عددی که در خاطر داشتی، اضافه کن. حاصل هفتصد و پنجاه و شش و یک چهارم می‌شود. جذر آن را استخراج کن، بیست و هفت و یک دوم می‌شود. آن را به خاطر بسپار. سپس عدد را، که بیست و چهار است، با نصف مربع عدد اشیاء، که دوازده و یک دوم است جمع کن؛ حاصل سی و شش و یک دوم می‌شود. اکنون از این آن‌چه را که در خاطر داشتی، یعنی بیست و هفت و یک دوم کم کن؛ باقی می‌ماند نُه که مال است و جذر آن که سه است، جذر مال است.

اثبات قاعده‌ها به همان ترتیب عرضه شده است. تنها نوآوری در مقایسه با روش ابوکامل در اثبات (۱) آن است که ابوکامل برای توصیف مال مربع رسم می‌کند در حالی که نمودار کرجی یک خط راست است.[۱]

من در این کتاب تصمیم گرفتم تا از اثبات‌ها، توضیحات طولانی و مثال‌های بیشمار پرهیز کنم.[۲] اما نمی‌توانم از عرضهٔ شرح مختصری از اثبات‌ها برای مسائل مرتبط[۳] و دلایل نصف کردن عدد اشیاء و آنچه که در رابطهٔ با آن‌هاست،[۴] چشم‌پوشی کنم.

پس برای این مورد داریم: یک مال و ده شئ معادل سی و نه واحد است $[x^2 + 10x = 39]$.

روش به دست آوردن جواب این است: نصف عدد اشیاء را در خودش ضرب کن و آن را به عدد بیفزا و جذر آن را استخراج کن و از حاصل نصف عدد اشیاء را کم کن.

اثباتش چنین است: خط BG را یک شئ فرض می‌کنیم. و خط AB را ده واحد می‌گیریم و آن را در نقطهٔ D به دو نیمه تقسیم می‌کنیم و آن را به اندازهٔ خط BG امتداد می‌دهیم. می‌دانی که اگر خطی توسط خط دیگری بسط داده شود و سپس آن خط و بسط آن در بسط ضرب شود و به آن مربع نصف آن خط اضافه شود، حاصل مساحت مربعی است که روی همهٔ نصف خط با بسط آن بنا

۱. ریاضیدانان پیش از کرجی، مانند خوارزمی، ابن ترک، ثابت بن قره و نعیم بن محمد بن موسی، در اثبات‌های خود، برای نشان دادن مال، مربع رسم می‌کردند. شاید کرجی مال را با پاره‌خط نشان داد تا از بعد دوم برای نمایش تعداد مال‌ها در (۲) استفاده کند.

۲. این انتقادی تلویحی از ابوکامل است که در کتابش ۵۰ اثبات از جمله ۱۵ اثبات برای دستورهای حل معادلات درجهٔ دوم آورده است.

۳. یعنی معادلات درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای.

۴. یعنی ادامهٔ الگوریتم.

می‌شود. پس در این مسئله خط AB به اندازهٔ خط BG بسط داده شده است. حاصل‌ضرب همهٔ خط AG در خط BG و حاصل‌ضرب خط BD در خودش مساوی است با حاصل‌ضرب خط DG در خودش. اقلیدس این را در کتاب اصول نشان داده است.[۱] ما می‌دانیم که خط AB برابر با ده است و خط BG جذر مال است و اگر همهٔ خط AB را در خط BG ضرب کنیم، سی و نه می‌شود که معادل با مال و ده شئ است. پس اگر به این خط، مجذور DB را، که پنج است، اضافه کنیم، شصت و چهار می‌شود که یک ریشهٔ آن خط DG است. پس خط DG معلوم و برابر با هشت است. و خط DB برابر با پنج است، پس خط باقیماندهٔ BG برابر با سه است که جذر مال است؛ پس مال نه است. و این شکل آن است:

و اگر کسی بگوید: سه مال و شش شئ معادل بیست و چهار واحد است: $[3x^2+6x=24]$ و بخواهی آن شئ را، بدون ردّ مال به یک مال، بیابی، باید خط BG را برابر با سه شئ و خط AB را برابر با شش فرض کنی و در نقطهٔ G خط DG را مساوی با خط BG به آن الحاق کنی[۲] و خط HT را موازی با خط BG و خط UY را موازی و هم‌راستا با آن رسم کنی به طوری که هر یک از قسمت‌های خط DG جذر مال باشد. بنابراین حاصل‌ضرب خط AG در GH سه مال و شش شئ است، چون که آن حاصل‌ضرب شش و سه شئ در یک شئ است که برابر با سطح AH است. اما سه مال و شش شئ معادل بیست و چهار واحد است؛ پس تمام سطح AD، یعنی کل سطح، هفتاد و دو است؛ که از ضرب AG در خط GD حاصل می‌شود. اما خط GD مساوی با خط BG است، پس همهٔ خط AG در خط BG برابر با هفتاد و دو است.

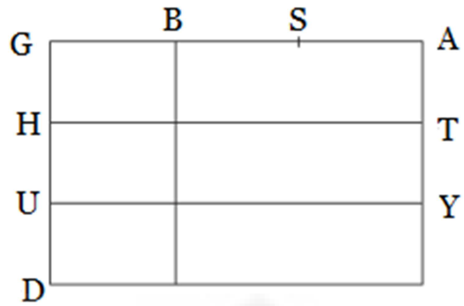
اکنون خط AB را، که شش است، در نقطهٔ S به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم تا خط SB برابر با سه شود. آن را در خودش ضرب می‌کنیم تا نه به دست آید. اگر همهٔ اینها را به حاصل‌ضرب خط AG در BG، که هفتاد و دو است، اضافه کنیم، نتیجه هشتاد و یک می‌شود. و جذر آن نه می‌شود که مساوی با خط SG است.[۳] اما خط SB برابر با سه است. با کم کردن آن، خط BG برابر با شش می‌شود. و چون خط BG را برابر با سه شئ گرفته بودیم، پس مقدار هر ریشه دو می‌شود و این شکل آن است:

---

۱. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.

۲ توجه کنید که مقیاس طول در راستاهای افقی و عمودی یکسان نیست. م

۳. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.



و اگر کسری از مال و شئ معادل با یک عدد بود، مانند نصف مال و دو شئ معادل با شش درهم $\left[\frac{1}{2}x^2+2x=6\right]$ و بخواهی مقدار شئ را، بدون کامل کردن مال بیابی، خط AB را برابر با نصف شئ و خط BD را برابر با دو و خط AY را برابر با جذر مال رسم کن.[1] پس حاصل‌ضرب خط AY در خط AD مساوی نصف مال و دو شئ است؛ زیرا آن از حاصل‌ضرب یک شئ در نصف یک شئ و دو حاصل شده، یعنی:

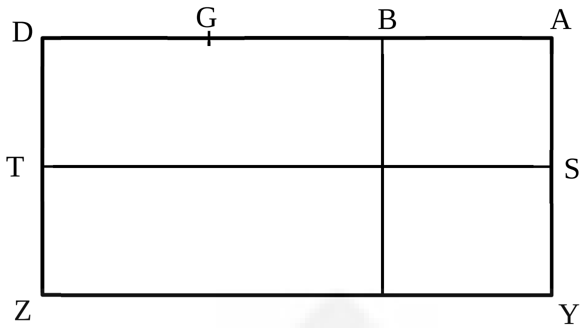
$$x\left(\frac{1}{2}x+2\right)$$

بنابراین همهٔ سطح AZ نصف مال است و دو شئ که برابر با شش واحد است؛ زیرا نصف مال و دو شئ مساوی با شش بوده است.

پس اگر خط AY را در نقطهٔ S به دو قسمت مساوی تقسیم کنی و خط ST را موازی با خط AD رسم کنی، آنگاه سطح SD برابر با سه است؛ زیرا نصف سطح بزرگتر است که از ضرب AD در AS حاصل شده است. اما AS مساوی با AB است؛ پس [حاصل‌ضرب] همهٔ خط DA در AB برابر با سه است.

اکنون باید خط BD را در نقطهٔ G به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم. AB بسط خط BD است. پس حاصل‌ضرب AD در AB، که سه است، با حاصل‌ضرب BG در خودش، که یک است، روی هم چهار می‌شود که مساوی با حاصل‌ضرب خط AG در خودش است.[2] پس خط AG برابر با دو است. اما خط BG یک است، پس خط AB نیز یک است. و چون این نصف شئ است، پس تمام شئ برابر با دو است که جذر مال است و این شکل آن است:

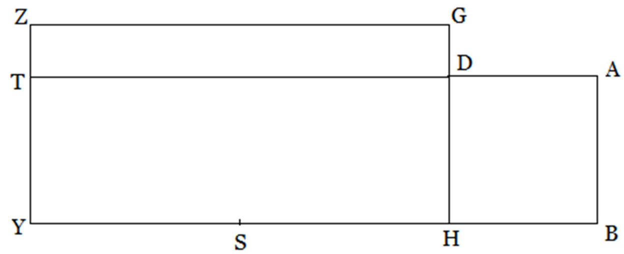
۱. در اینجا هم مقیاس طول در راستاهای افقی و عمودی یکسان نیست. م
۲. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.



و اگر یک مال و ده شئ معادل سی و نه واحد باشد [$x^2 + 10x = 39$]. و بخواهی مال را بیـابی، خط GD را یک مال و خط DH را ده شئ در نظر بگیر. پس همهٔ خط GH سـی و نـه واحـد اسـت. خط DA را مساوی با خط DH رسم کن و روی آن مربـع DB را بنـا کـن و آن بـه صـد مـال تقسـیم می‌شود، زیرا اگر ده جذر چیزی در خودش ضرب شود، صد برابر همـان چیـز حاصـل مـی‌شـود. و سطح GT را مساوی با سطح DB بنا می‌کنیم. پس سطح GT نیز به صد مال تقسیم می‌شـود. چـون خط GD یک مال است، خط DT برابر با صد، و همهٔ سطح GY سه هزار و نهصـد اسـت، چـون از ضرب خط GH، که سی و نه است، در GZ، که صد است، حاصل شده است. به همین ترتیب همهٔ سطح TB برابر با سه هزار و نهصد می‌شود، زیرا سطح GT مساوی با سطح DB اسـت. امـا سـطح TB از ضرب خط YB در خط HD که مساوی با خط AB است حاصل شده است.

پس HY را در نقطهٔ S به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و می‌گوییم که حاصـل‌ضـرب خـط YB در BA است، که سه هزار و نهصد است، با حاصل‌ضرب HS در خودش، که دو هزار و پانصد است، روی هم شش هزار و چهار صد می‌شود؛ کـه بـا شـرایطی کـه قـبلاً گفتـه شـد[۱]، مسـاوی بـا حاصل‌ضرب خط BS در خودش است. پس خط BS برابر با هشتاد است. اما خط DH مساوی بـا خط HB است، پس مجموع خط DH و HS هشتاد است. امـا خـط HS پنجـاه اسـت، پـس خـط باقیماندهٔ DH سی است. و خط GH سی و نه بود؛ پس خط GD برابر با نه است کـه مـال اسـت. و این شکل آن است:

۱. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس.



(۴) و اگر بخواهی جذر مال را به روش مورد استفادهٔ دیوفانتوس، برای معادلهٔ $x^2+10x=39$ بیابی، باید دنبال عددی بگردی که اگر آن را به مال و ده شئ [x^2+10x] اضافه کنی جذر داشته باشد. آن عدد چیزی نیست بجز بیست و پنج که اگر آن را به یک مال و ده شئ اضافه کنی، یک ریشه دارد و آن شئ و پنج درهم است: $x+5$. و می‌دانی که یک مال و ده شئ برابر با سی و نه واحد است:

$$x^2+10x=39$$

پس اگر مال و ده شئ را حذف کنی و به جای آن عدد سی و نه را قرار دهی؛ حاصل شصت و چهار می‌شود که جذر آن هشت است و آن مساوی یک شئ و پنج درهم است. پس شئ مساوی سه درهم است که جذر مال است.

در «روش مورد استفادهٔ دیوفانتوس» کرجی مشاهده می‌کند که اگر ۲۵ به x^2+10x اضافه شود، مجموع یک ریشه خواهد داشت که $x+5$ است. به عبارت دیگر

$$(x+5)^2 \rightarrow x^2+10x+25$$

با جاگذاری سی و نه به جای x^2+10x که مساوی با آن است، نتیجه می‌شود:

$$(x+5)^2 \rightarrow 64$$

و جذر ۶۴ برابر با هشت است که مساوی با $x+5$ است. کار در چارچوب ضرب $x+5$ در خودش انجام می‌شود بدون متنی راجع به ضرب $x+5$ در خودش و معادله با جاگذاری سی و نه به جای x^2+10x حل می‌شود.

برای معادلهٔ درجهٔ دوم نوع دوم

$$ax^2+c=bx$$

کرجی همان الگو را دنبال می‌کند. او قاعده‌ای عرضه می‌کند با مثال‌هایی برای (۱)، (۲) و (۳) و سپس آن‌ها را به همان ترتیب اثبات می‌کند. سپس دوباره با روش دیوفانتوس و این بار با معادلهٔ $x^2+21=10x$ کار را به پایان می‌رساند.

(۴) و اگر بخواهی این مسئله را بر طبق روش دیوفانتوس حل کنی، باید به دنبال یک مربع بگردی که اگر کم کنی از آن [و یک عدد] ده شئ را، که معادل با مال و بیست و یک واحد است، باقیمانده یک مربع باشد. پس ضلع مربع را یک شئ بجز پنج، $x-5$، یا پنج بجز یک شئ، $5-x$، بگیر. و هر یک از آن‌ها منجر به یک کمیت از آحاد می‌شود. این کمیت مال است و بیست و پنج واحد بجز ده شئ:

$$x^2+25-10x$$

به جای ده شئ، یک مال و بیست و یک واحد را قرار بده، زیرا با هم مساویند. پس چهار باقی می‌ماند که جذر آن دو است. پس اگر پنج بجز شئ گرفته باشی که برابر با دو شده، پس شئ برابر با سه می‌شود. و اگر شئ بجز پنج گرفته باشی که برابر با دو شده، پس شئ برابر با هفت می‌شود.

در اینجا $(x-5)^2$ و $(5-x)^2$ هر دو منجر به $x^2+25-10x$ می‌شود. چون $x^2+21=10x$ است، می‌توانیم جملهٔ $10x$ در عبارت $x^2+25-10x$ را با x^2+21 جایگزین کنیم تا منجر به

$$x^2+25-(x^2+21)\to 4$$

شود. پس دو جواب از $(x-5)^2\to 4$ و $(5-x)^2\to 4$ نتیجه می‌شوند.

برای معادلهٔ درجهٔ دوم نوع سوم $ax^2=bx+c$ دوباره همان الگو دنبال می‌شود؛ بجز آن‌که دو بخش نادیده گرفته می‌شود: قاعده و مثال‌ها برای حل معادلات نابهنجار (۲) و «روش دیوفانتوس» (۴). اما اثبات‌های (۲) عرضه می‌شود؛ پس کرجی باید در اصل قاعده و مثال‌های آن را آورده باشد؛ اما این‌ها، در مرحله‌ای ضمن بازنویسی متن حذف شده است. این نشان می‌دهد که احتمالاً «روش دیوفانتوس» برای معادلات درجهٔ دوم نوع سوم نیز به همین سرنوشت دچار شده است.

کرجی برای قاعده‌های (۱)، (۲) و (۳) طبق معمول ابتدا قاعده و سپس اثبات جداگانه را می‌آورد. گرچه «روش دیوفانتوس» بیش از آن‌که یک روش مجزا باشد، نتیجه‌ای از قاعدهٔ (۱) است، لذا مستلزم اثبات جداگانه‌ای نیست؛ زیرا مراحل کار در طول مسیر توجیه می‌شود. در مقایسه، ثابت بن قره در اواخر قرن سوم هجری قاعده‌ها و اثبات‌ها را به طور مشابه در رساله‌ای منفرد به نام قول في تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیة گرد آورده است. وی در آنجا قاعدهٔ (۱) را برای حل سه معادلهٔ درجهٔ دوم بهنجار از طریق ترسیم‌های هندسی با تکیه بر قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس استخراج کرده است. او در عنوان اثر آن‌ها را «براهین» اما در متن خود آن‌ها را «راه‌حل‌ها» می‌نامد. مانند «روش دیوفانتوس» کرجی، قاعده‌ها در آغاز عرضه نمی‌شوند، بلکه طی عملیات (در اینجا ترسیم) که آن‌ها را نیز توجیه می‌کنند ظاهر می‌شوند. مقاله چنین آغاز می‌شود:

«اصل اول این است: یک مال و اشیاء معادل عدد است [$x^2+bx=c$]. راه‌حل این مسئله بر مبنای قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس، به صورتی است که من توصیف می‌کنم. فرض کنید مال مربع ABCD باشد و ... .»

۷. راه‌حل‌هایی برای معادلات درجهٔ دوم در مسائل کرجی

مسائلی که کرجی در الفخري آورده همه از مقالات اول تا چهارم کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس گرفته شده است؛ بنابراین هیچ‌یک از آن‌ها نشانی از معادلات درجهٔ دوم ندارند. اما در میان حدود ۱۵۰ مسئلهٔ جبر دورهٔ اسلامی در این کتاب و چند مسئلهٔ حل شده در کتاب الکافي؛ کرجی تا ۲۲ بار معادلات درجهٔ دوم نابهنجار را حل کرده است. او در هر نمونه روش متعارف جبردانان مسلمان (روش ۱) را دنبال می‌کند که عبارت است از به کاربردن عمل ردّ و تکمیل برای آنکه مال‌ها را به یک مال تبدیل کند. او در هیچ کجای این کتاب‌ها قاعدهٔ (۲) را برای معادلات نابهنجار یا پیداکردن مستقیم مال (قاعدهٔ ۳) یا روش دیوفانتوس (قاعدهٔ ۴) را به کار نمی‌برد.

اما کرجی در دو مورد در البدیع في الحساب قاعدهٔ (۲) را برای معادلات نابهنجار به کار می‌برد. او به عنوان بخشی از دستور کار خود در مورد چگونگی حل معادلات نامعین، توضیح می‌دهد که چگونه هنگام تنظیم معادلات، مربع مناسب را برای تضمین یک جواب گویا انتخاب کنید. این قاعده در مواردی برای حل معادلهٔ «مجموع یا تفاضل مکعبات و اشیاء مساوی با مربعات است»، به کار می‌رود.[1]

پس اگر کسی بگوید: سه مکعب و پنج شئ معادل با یک مربع است، تو آن را با مال مقابله کن، به طوری که اگر عدد آن را نصف کنی و آن را در خودش ضرب کنی و آن را از آنچه از ضرب عدد در عدد کعب‌ها در عدد اشیاء حاصل می‌شود کم کنی، باقیمانده یک مربع باشد. پس در مورد «سه کعب و پنج شئ معادل است با شانزده مال» [$3x^3+5x=16x^2$] شانزده را نصف کن و آن نصف را مربع کن و از آن پانزده را، که از ضرب سه در پنج حاصل می‌شود، کم کن؛ باقی می‌ماند چهل و نه. جذر آن را استخراج کن، که هفت است. به آن نصف مربع‌ها را اضافه کن، پانزده می‌شود. آن را بر عدد کعب‌ها، که سه است، تقسیم کن، پنج حاصل می‌شود که ضلع آن مکعب است. و اگر خواستی، با کم کردن عمل کن تا جذر مال (ریشهٔ دیگر معادله) را به دست آوری که یک سوم واحد است.

با نمادهای امروزی دو راه‌حل معادلهٔ $ax^2+c=bx$ عبارت است از:

۱. کرجی در اینجا جمله‌ها را به شئ تقسیم نمی‌کند که به معادلهٔ درجهٔ دوم برسد.

$$x = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - ac}\right]$$

پس اگر کسی بگوید «سه کعب بجز سه شئ و یک سوم شئ معادل یک مربع است»، مقابله کن آن را با نُه مال

$$3x^3 - 3\frac{1}{3}x = 9x^2$$

پس ریشهٔ نتیجه شده سه و یک سوم واحد است.

$$x = 3\frac{1}{3}$$

و برای این قاعده، اگر کعب‌ها از اشیاء کم شوند، مثل اینکه «سه شئ و یک سوم شئ منهای سه کعب است»، مقابله کن آن را با نه مال:

$$3\frac{1}{3}x - 3x^3 = 9x^2$$

در این صورت می‌توانی آن را بدین شکل بازنویسی کنی که «سه کعب و نه مال معادل سه و یک سوم شئ می‌شود» [$3\frac{1}{3}x = 3x^3 + 9x^2$] پس عدد اموال را نصف و آن را مربع کن و به آن حاصل‌ضرب عدد کعب‌ها در عدد اشیاء، یعنی ده، را اضافه کن؛ تا سی و یک چهارم ($30\frac{1}{4}$) واحد به دست آید. جذر آن بجز نصف عدد اجذار، برابر با یک است.[1] آن را بر عدد کعب‌ها تقسیم کن، نتیجه آنکه ریشه، یک سوم واحد می‌شود، که جواب است.

با نمادهای امروزی این جواب معادلهٔ $ax^2 + bx = c$ عبارت است از:

$$x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + ac} - \frac{1}{2}b\right]$$

جستجو برای مربع مناسب در این شرایط یک مشکل عمدهٔ روش دیوفانتوس است[2]. روش حل، بدون بهنجار کردن معادله، دقیقاً روشی است که خود دیوفانتوس به کار برده است. از آنجا که کرجی قاعدهٔ متعارف جبر دورهٔ اسلامی را در همهٔ موارد دیگر در کتاب‌های خود به کار برده، بی‌شک این روش را از اریثمتیکای دیوفانتوس گرفته است. بنابراین به طور بالقوه هر دو قاعدهٔ (۲) و (۴) برگرفته از دیوفانتوس است.

---

۱. یعنی $\sqrt{30\frac{1}{4}} - 4\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 1$

۲. این نوع از مسائل، با کعب‌ها و اعداد، در مسائل نامعین جبر دورهٔ اسلامی قبل از کرجی یافت نمی‌شود.

۸. اثبات‌های کرجی در کتاب *علل حساب الجبر والمقابلة*

کرجی رسالهٔ علل حساب الجبر والمقابلة وشرحها والبراهين عليه را بعد از الفخري نوشته است. او در این رساله می‌گوید کسانی در درک هندسی اثبات‌های او مشکل داشته‌اند، بنابراین در این رساله چند قضیه را از طریق محاسبه اثبات می‌کند. این‌ها شامل اثبات راه‌حل‌های معادلات از نوع $ax^2 = bx$ و سه نوع معادلهٔ درجهٔ دوم سه‌جمله‌ای است و نیز قواعدی برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم رادیکال‌ها است.

روش استدلال در اثبات چگونگی حل معادلات درجهٔ دوم همان روش دیوفانتوس به کار رفته در الفخري است. اما در اینجا به جای استخراج راه‌حل معادلات، «علل» یا براهین قواعد متعارف جبر دورهٔ اسلامی (۱) بعد از بهنجارسازی معادلات آورده می‌شود. در اینجا ابتدا هر قاعده تبیین و سپس اثبات می‌شود. این رساله نشان می‌دهد چگونه «روش» [متعارف جبر دورهٔ اسلامی] برای نوع سوم، که در الفخري نیامده بود، به کار می‌آید.

اولین مسئلهٔ در مورد نصف کردن اجذار: $\left[x^2 + bx = c \rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + c} - \frac{1}{2}b\right]$

اگر می‌خواهی دلیل این گفته را نشان دهی، در مسئلهٔ اول، که مال و اشیاء معادل عدد است، راه‌حل این است: عدد اشیاء را نصف کن و آن را در خودش ضرب کن و به آن تمام عدد را، که مساوی مال و اشیاء است، اضافه کن؛ سپس جذر مجموع را استخراج کن؛ و از آن نصف عدد اشیاء را کم کن؛ آنچه باقی می‌ماند جذر مال مذکور است.

فرض کن یک مال و ده شئ معادل بیست و چهار درهم باشد $[x^2 + 10x = 24]$:

اکنون خواستار همخوانی بین اشیاء و اعداد هستیم. به اشیاء همان عدد نصف اشیاء، را که پنج است، اضافه می‌کنم؛ زیرا در این اولین مسئله، چنان که قبلاً توضیح دادم، در نظر گرفتن یک شئ و پنج عدد، $x + 5$، آمده است. پس این را در خودش ضرب می‌کنیم تا یک مال و ده شئ و بیست و پنج درهم به دست آید $\left[(x+5)^2 \rightarrow x^2 + 10x + 25\right]$. قبلاً مال و ده شئ معادل با بیست و چهار درهم را داشتیم. پس اگر بیست و چهار را در این ضرب به جای مال و ده شئ قرار دهیم، ضرب یک شئ و پنج در خودش چهل و نه می‌شود $[(x+5)^2 \rightarrow 49]$. پس جذر چهل و نه، که هفت است، برابر با شئ و پنج است. پنج را از آن کم می‌کنم، دو باقی می‌ماند که جذر مال است و مال چهار است و ده شئ برابر با بیست است. اگر آن‌ها را به هم اضافه کنی، بیست و چهار می‌شود. پس این قاعده در قلمرو عدد به درستی اثبات شده است. حال اگر این مسئله بدون تغییر بود بجز آن‌که مال و شئ معادل یک عدد بزرگتر از بیست و چهار بود به طوری که مجموع، عددی با جذر گویا نبود،

می‌گوییم که جذر آن عدد را از پنج کم کن تا جذر مال باشد. مثلاً اگر گفته شود: یک مال و ده شیئ معادل سی درهم است [$x^2+10x=30$]، سی را به بیست و پنج اضافه می‌کنیم، پنجاه و پنج می‌شود. می‌گوییم که چون از جذر پنجاه و پنج عدد پنج کم شود، حاصل [$\sqrt{55}-5$]، جذر مال خواسته شده است. این قاعده‌ای برای استخراج جواب این نوع معادلات است.

دومین مسئله در نصف کردن اجذار $\left[x^2+c=bx \rightarrow x=\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2-c}\right]$

این است دلیلی که در مسئلهٔ دوم گفتیم که راه‌حل این است: عدد اشیاء را نصف کن و آن را در خودش ضرب کن و از آن عددی را که با اموال است کم کن، سپس جذر باقیمانده را استخراج و آن را از نصف عدد اشیاء بکاه یا به آن بیفزا. آنچه بعد از جمع یا تفریق حاصل می‌شود، جذر مال است.

فرض کنید بگویم: یک مال و شانزده درهم معادل ده شیئ است [$x^2+16=10x$]. می‌خواهیم بین اشیاء و اعداد همخوانی ایجاد کنیم. یک ریشهٔ مال را پیدا کردیم که در آنجا نصف عدد اشیاء کاسته می‌شد یا اینکه شیئ از نصف عدد اشیاء، که پنج است، کم می‌شد. پس نتیجه شیئ بجز پنج، [$x-5$]، یا پنج بجز شیئ [$5-x$] است. اکنون این را در خودش ضرب می‌کنیم تا یک مال و بیست و پنج بجز ده شیئ [$x^2+25-10x$] به دست آید. می‌دانیم که ده شیئ برابر با یک مال و شانزده درهم است. پس اگر از مال و بیست و پنج، ده شیئ را که با یک مال و شانزده جایگزین می‌شود، کم کنیم؛ باقی می‌ماند، نُه [$x^2+25-(x^2+16) \rightarrow 9$].

پس یک ریشهٔ نُه، که سه است، در خودش ضرب می‌شود. اگر ما آن را شیئ بجز پنج بگیریم، شیئ هشت می‌شود؛ زیرا که شیئ بجز پنج نتیجه‌اش سه است. و اگر پنج بجز شیئ بگیریم، شیئ دو می‌شود. پس نتیجه در هر دو صورت ریشهٔ خواسته شده است.

اکنون اگر آن را هشت بگیری، مال شصت و چهار می‌شود. و اگر به آن شانزده را بیفزایی، هشتاد می‌شود؛ که مساوی ده برابر ریشه، یعنی هشت، است. و اگر آن را دو بگیری، پس مال چهار می‌شود. پس اگر به آن شانزده را اضافه کنی، بیست می‌شود که همان ده برابر ریشه، یعنی دو، است.

[او بعداً در مورد چگونگی انتخاب بین جمع و تفریق راهنمایی می‌کند.]

و اگر شیئ که نصف عدد اشیاء از آن کم شده $\left[x-\frac{1}{2}b\right]$، یا نصف عدد اشیاء که از آن شیئ کم شده $\left[\frac{1}{2}b-x\right]$ را در خودش ضرب کنی؛ منجر شود به مال و عددی مساوی با عددی که با مال

معادل با جذرها شده، منهای جذرهایی معادل با جذرهای موجود در معادله[1]. آنگاه نصف تعداد اشیاء جذر مال است.

مثال: اگر بگوییم: یک مال و بیست و پنج درهم مساوی ده شئ است: $x^2+25=10x$؛ پس اگر یک شئ بجز پنج را یا پنج بجز یک شئ را در خودش ضرب کنیم؛ حاصل یک مال و بیست و پنج بجز ده شئ می‌شود $\left[x^2+25-10x\right]$. و این ده شئ کم شده برابر با یک مال و بیست و پنج است. پس به همین صورت بیست و پنج، بیست و پنج را از بین می‌برد. پس اگر مقابله را ادامه دهیم، چیزی باقی نمی‌ماند که از ضرب کردن چیزی در چیزی به دست آوریم یا از ضرب کردن چیزی کمتر در چیزی کمتر به دست آوریم. و اگر چنین است پس مثل این است که بگوییم یک شئ بجز پنج چیزی باقی نمی‌گذارد یا پنج بجز شئ چیزی باقی نمی‌گذارد. بنابراین ما کل آن شئ را یا کل آن پنج را استثناء کرده‌ایم. پس همهٔ پنج همهٔ شئ است و همهٔ شئ پنج است.

[او سپس در مورد حالتی بحث می‌کند که در آن مربع نصف عدد اشیاء کمتر از عدد است که بدین معنی است که معادله جواب ندارد.]

سومین مسئله در مورد نصف کردن عدد اجذار

$$\left[x^2=bx+c \to x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2+c}+\frac{1}{2}b\right]$$

در اینجا توضیح می‌دهیم چرا در مسئلهٔ سوم می‌گوییم راه‌حل این است که باید عدد اشیاء را نصف کنی و آن را در خودش ضرب کنی و عددی که با اشیاء است را به آن اضافه کنی و جذر آن را استخراج کنی و به نصف عدد اشیاء اضافه کنی، آنگاه مجموع جذر مال است.

این مانند آن است که بگوییم «پنج درهم و چهار شئ معادل یک مال است» $[5+4x=x^2]$. می‌خواهیم بین اشیاء و اعداد همخوانی ایجاد کنیم و لازم است که از اشیاء نصف عدد اشیاء کم شود و نه بیشتر، چون که مال معادل اشیاء و اعداد است.

[او سپس توضیح می‌دهد که شئ، x، باید بزرگتر از $\frac{1}{2}b$ باشد.]

پس اگر از شئ همان نصف عدد اشیاء را کم کنیم، یک شئ بجز دو درهم $[x-2]$ باقی می‌ماند. این را در خودش ضرب می‌کنیم تا یک مال و چهار درهم بجز چهار شئ شود: $[(x-2)^2 \to x^2+4-4x]$.

۱. «عددی که با مال معادل با جذرها شده» همان c و «جذرهایی معادل با جذرهای موجود در معادله» bx است. در این شرایط $(x-\frac{b}{2})^2$ و $(\frac{1}{2}b-x)^2$ معادلند با x^2+c-bx یا به عبارت ساده‌تر $(\frac{1}{2}b)^2=c$.

فرض کردیم که مال در این مسئله برابر با چهار شئ و پنج درهم باشد. پس اگر چهار شئ و پنج درهم را در این ضرب به جای مال قرار دهیم، داریم

$$x^2+4-4x \rightarrow (4x+5)+4-4x$$

پس یک شئ بجز دو درهم را در خودش ضرب می‌کنیم تا نه درهم را به دست آوریم:

$$(x-2)^2 \rightarrow 9$$

جذر نُه را به دست می‌آوریم، که سه است که برابر با یک شئ بجز دو درهم است. پس اگر به سه، دو درهم را اضافه کنیم، مقدار شئ برابر با پنج می‌شود که جواب مورد نظر است. اگر این پنج را در خودش ضرب کنیم، بیست و پنج می‌شود که مال است که مساوی است با چهار شئ که بیست است و پنج درهم.

کرجی مجموعهٔ دیگری از اثبات‌های حسابی را در کتابش، الكافي في الحساب، عرضه می‌کند. اثبات‌ها برای انواع ۴ و ۶ معادلات شبیه هستند؛ اما با معادلات کتاب علل حساب الجبر والمقابلة یکسان نیستند و اثبات نوع ۵ کاملاً متفاوت است. به نظر می‌رسد کرجی با این آثار جریانی را به دور از اثبات هندسی آغاز کرده است. چهار ریاضیدان بعدی که تحت تأثیر مستقیم یا غیر مستقیم کرجی قرار گرفتند و کسانی که اثبات حسابی این قوانین را عرضه کردند، عبارتند از: ابن یاسمین (د. ۶۰۰ق)، ابن بنّا (اواخر قرن هفتم هجری)، کمال الدین فارسی (حدود ۷۲۰ق) و ابن هائم (۷۸۹ق). این اثبات‌ها مبتنی بر سه حالت زیر بودند: (الف) قانون مجذور دوجمله‌ای یا تبدیل به مربع کامل، (ب) بیان مجدد قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس با جملات حسابی، یا (ج) دستور سادهٔ خاصی برای ضرب اعداد که از حساب انگشتی گرفته شده بود.

۹. نتیجه گیری

تعداد اندکی از مورخان به «روش دیوفانتوس» کرجی توجه کرده‌اند. فرانتس وپکه[۱] دو متن مذکور از الفخري را بی هیچ توضیحی ترجمه کرده است. توماس هیث[۲] و پل ور اکه[۳] از کار وپکه اطلاع داشتند، اما آن‌ها هم در کتاب‌های خود از این روش نامی نبرده‌اند. رشدی راشد آن را مطرح می‌کند، اما او نیز در پیوند دادن آن با نامگذاری اجزایی از ده به صورت «پنج و یک شئ» و «پنج بجز یک شئ» در ابتدای راه‌حل برخی از مسائل در نوشتهٔ ابوکامل گمراه شده است. تنها مورخی که به طور جدی موضوع را بررسی کرده ژاک سزیانو است. او می‌نویسد:

بعید به نظر می‌رسد که کرجی از هیچ روش دیوفانتوسی برای حل معادلات درجهٔ دوم کامل اطلاع داشته است؛ زیرا این معادلات نه تنها در سه کتاب بعدی یونانیان وجود دارد که ظاهراً کرجی با آن‌ها

1. Franz Woepcke
2. Thomas Heath
3. Paul Ver Eecke

آشنا نبوده است بلکه روش حل آن‌ها در اریثمتیکا مانند آنچه کرجی به کار برده و صـریحاً بـه دیوفـانتوس نسبت داده نیست. می‌توان تصور کرد کرجـی از رسـالهٔ دیگـری از دیوفـانتوس یـا منسـوب بـه او در ایـن موضوع اطلاع داشته است؛ اما هیچ منبعی نداریم که نام دیوفانتوس را با چنین اثری مرتبط سازد.

این بحث را که کرجی با متن یونانی مقالات چهارم تا ششم آشـنا نبـوده، عـادل انبوبـا در چکیـدهٔ همراه با تصحیحش از کتاب البدیع في الحساب کرجی آورده است. حتی اگر کرجی ایـن کتـاب‌هـا را نخوانده باشد، به این معنی نیست که او کتاب گمشده‌ای را که در آن راه‌حل‌های معادلات سه‌جملـه‌ای توضیح داده شده، نخوانده است. دو راه‌حل به سبک دیوفانتوس بـرای معـادلات کامـل در البـدیع فـي الحساب که در بخش هفتم بالا ترجمـه شـد، نشـان مـی‌دهـد کـه کرجـی روش دیوفـانتوس را بـرای استخراج ریشه‌های این معادلات می‌دانسته است و این ما را از پرداختن به فرض‌های نامحتمل سزیانو نجات می‌دهد. پس مسئله به سازگاری روش دیوفانتوس با عمل واقعی دیوفانتوس تبدیل می‌شود.

به احتمال زیاد دیوفانتوس هم همان سه معادلهٔ مقترنه را که در جبـر دورهٔ اسـلامی مـی‌یـابیم در جایی در قسمت‌های موجود مقالهٔ هفتم و مقالهٔ چهارم اریثمتیکا طبقه‌بنـدی یـا حـل کـرده اسـت. قواعدی که دیوفانتوس در حل نامعادلات مسئلهٔ ۳۹ مقالهٔ چهـارم و مسـئلهٔ ۱۰ مقالـهٔ پـنجم دنبـال می‌کند؛ همچون قواعد جبر دورهٔ اسلامی فاقد هرگونه توضیحی دربـارهٔ منطـق کـارکرد ایـن قواعـد است. این خلاف روحیهٔ آموزشی کتاب اوست که قواعد را بدون هیچگونه استدلال یا توضـیحی در توجیه آن‌ها عرضه کند، در صورتی که در مقدمهٔ کتاب خود قول چنین توضیحی را داده بـود. «روش دیوفانتوس» در آثار کرجی این نقش را به خوبی پر می‌کنـد و آن «روش» بـا نـام دیوفـانتوس همـراه می‌شود که قبلاً به آن پیوست شده بود.

بنابراین من حدس می‌زنم که دیوفانتوس بـرای هـر نـوع معادلـه، قاعـدهٔ (۲) را بـرای معـادلات غیرنرمال با استفاده از روش (۴) استخراج کرده است. در واقع این روش بـرای معـادلات غیرنرمـال نیز کاربرد دارد. برای مثال برای حل معادلهٔ از نوع $ax^2 + bx = c$ هر کسی می‌تواند همـهٔ جمـلات را در a ضرب کند تا به صورت

$$a^2x^2 + abx = ac$$

درآید و سپس عددی را جستجو کند که وقتی به سمت چپ اضافه شود یک مربـع تولیـد شـود. (این عدد $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$ است و مربع حاصل به صورت $\left(ax+\frac{1}{2}b\right)^2$ می‌شود.) با این روش هـر کسـی می‌تواند مستقیماً به قاعدهٔ دیوفانتوس برسـد. البتـه ایـن صـرفاً یـک حـدس اسـت و ممکـن اسـت دیوفانتوس به جای آن با تقسیم بر $\frac{5}{4}$ با معادلات نرمال کار کرده باشد، همانطور کـه کرجـی نشـان می‌دهد. هر دوی اقتباس‌ها در سرشتشان رویکردی دیوفانتوسی دارند و می‌توانند منجر به قاعـده‌ای شوند که او در مقالات موجود آن را دنبال کرده است.

کرجی به نوبهٔ خود قاعدهٔ به دست آوردن مستقیم مال (۳)؛ و ایـدهٔ اثبـات قواعـد بـا اسـتفاده از قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم اصول اقلیدس را از ابوکامل فراگرفتـه و نیـز قاعـدهٔ حـل معـادلات غیرنرمال (۲)، و روش دیوفانتوس، (۴)، را از دیوفانتوس اخذ نموده است. از آنجـا کـه اثبـات‌هـای هندسی برای کسانی که الفخري کرجی را می‌خواندنـد واضـح نبودنـد، وی روش دیوفـانتوس را بـا اثبات‌های حسابی برای قاعدهٔ استاندارد (۱) در رسالهٔ علل الجبر والمقابلة جایگزین کرد.

این جهت‌گیری جدید به دور از هندسه و به سمت اثبات حسابی تبدیل به روندی شد که چندین جبردان بعدی از جمله ابن یاسمین، ابن البنا، کمال الدین فارسی و ابن هائم آن را دنبال کردند. تنهـا کتاب‌های جبر دورهٔ اسلامی منتشر شده که پس از کرجی اثبات هندسی را دنبال کرده، عمر خیـام و سموئل مغربی است که بر مبنای آثار ابوکامل و کرجی آثارشان را تألیف کرده‌اند. حتی شرف الـدین طوسی در تنظیم معادلات خیام بر الگوریتمی عددی بـرای حـل معـادلات متکـی اسـت. بـه نظـر می‌رسد کرجی با الهام از دیوفانتوس این روند را آغاز کرده باشد.

منابع

[1]. Abū Kāmil, Alg.(a): Hogendijk, J. P. 1986. *The Book of Algebra: Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala*. Frankfurt.

[2]. Abū Kāmil, Alg.(b): Rashed, R. 2012. *Algèbre et Analyse Diophantienne*. Berlin.

[3]. al-Karajī, al-Badīʿ: Anbouba, A. 1964. *al-Badīʿ fī al-ḥisāb*. Beirut.

[4]. al-Karajī, al-Kāfī: Chalhoub, S. 1986. *al-Kāfī fī'l ḥisāb*. Aleppo.

[5]. al-Karajī, al-Fakhrī: Saidan, A. S. 1986. *Tārīkh ʿilm al-jabr fī l-ʿālam al-ʿArabī*. (History of Algebra in Medieval Islam). 2 vols. Kuwait.

[6]. al-Khwārizmī: Rashed, R. 2009. *Al-Khwārizmī: The Beginnings of Algebra*. London.

[7]. Sinān ibn al-Fatḥ: *Kitāb al-kaʿb wa'l-māl wa'l-aʿdād al-mutanāsiba*. MS Cairo, Riyadāt 260/4 ff. 95r-104v.

[8]. Woepcke, F. 1853. *Extrait du Fakhrī*, Traité d'Algèbre par Aboù Bekr Mohammed ben Alhaçan AlkarkhÎ (Manuscrit 952, Supplément Arabe de la Bibliothèque Impériale); Précédé d'un Mémorie sur l'Algèbre Indéterminée chez les Arabes. Paris.