بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

میراث علمی اسلام و ایران

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال هشتم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۸

شمارهٔ پیاپی: ۱۶

صاحب امتیاز: **مؤسسهٔ پژوهشی میراث مکتوب**
مدیر مسئول: **اکبر ایرانی**
سردبیر: **محمد باقری**
مدیر داخلی: **زینب کریمیان**
ویراستار: **پویان رضوانی**
اجرای جلد: **محمود خانی**

مدیر فنّی و امور چاپ: **حسین شاملوفرد**

تصویر پشت جلد: شکل موجود در برگ ۱۲۰پ نسخهٔ خطی شمارهٔ ۱۶۹ فارسی کتابخانهٔ ملی پاریس

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۴۰٫۰۰۰ تومان

فهرست

سرسخن ۱

مقاله

ابن هیثم ریاضی‌دان، ابن هیثم فلسفه‌دان: نگاهی به ادلهٔ رشدی راشد بر تمایز میان دو ابن هیثم ۵
حامد آرضایی

پیدایش و سیر تحول دورهٔ ۱۲۸ ساله در تقویم هجری شمسی ۲۳
محمدرضا صیاد

علوم پزشکی، داروسازی و دامپزشکی در شرق ایران دورهٔ اسلامی و آسیای میانه ۴۱
اِل. ریشتر-برنبورگ، ترجمهٔ پریوش ایزدی و علیرضا گلشنی

علم هیئت در تمدن اسلامی ۵۸
ی. ت. لانگرمن، ترجمهٔ محمد سلیمانی تبار

تقویم ملکی در دستورالمنجمین ۸۱
بنو وان دالن، ترجمهٔ لاله شاکریان و احسان رمضانی

تعیین سینوس یک درجه در یک رسالهٔ سانسکریت با الهام از مثلثات دورهٔ اسلامی ۹۵
کلمنسی مونتل و ک. راماسوبرامانیان، ترجمهٔ مریم زمانی

ساعت‌های آفتابی عثمانی ۱۱۶
جانّی فِراری، ترجمهٔ مهدی نوروزی‌بخش

معرفی کتاب

ورزنامه و ارتباط آن با الفلاحة الرّومیّة ... ۱۲۷
علی صفری آق‌قلعه

نسخه‌های خطی

بررسی محتویات نسخهٔ شمارهٔ ۱۶۹ فارسی کتابخانهٔ ملی پاریس ۱۴۸
محمدمهدی کاوه‌یزدی

رساله

رسالهٔ خلاصة‌الاعداد دربارهٔ مربع‌های وفقی ۱۸۶
سید جلال‌الدین طهرانی، به کوشش علی مرادی

میراث علمی اسلام و ایران، سال هشتم، شمارهٔ دوم (پیاپی ۱۶)، پاییز و زمستان ۱۳۹۸

تعیین سینوس یک درجه در یک رسالهٔ سانسکریت با الهام از مثلثات دورهٔ اسلامی[۱]

کلمنسی مونتل[۲] و ک. راماسوبرامانیان[۳]
ترجمهٔ مریم زمانی[۴]

مقدمه

سَروَسِدهانتراجا (سرآمد همهٔ سدهانت[۵]ها) رسالهٔ نجومی معروفی به زبان سانسکریت است که بینشی از کنه گرایش‌ها و کارهای عملی اخترشناسی قرن هفدهم میلادی (یازدهم هجری) در شبه قارهٔ هند به دست می‌دهد. نیتیاننداکه منجم دربار شاه جهان حاکم مغول دهلی بود آن را در ۱۶۳۹م نوشت. سروسدهانتراجا کتابی سترگ از نظر حجم و محتوا شامل ابیاتی در ۱۲ فصل در حوزهٔ اخترشناسی، از تقویم گرفته تا ابزارهاست (خلاصه‌ای از مطالبش در جدول ۱ آمده است). بررسی‌های اولیهٔ اثر نشان داده است آموزه‌های سنتی نیتیانندا با مفاهیم و مشخصه‌های علوم اسلامی پرورانده شده است. بی‌شک آشنایی او با این سنت اخترشناسی از ترجمهٔ مجموعهٔ عظیمی از جدول‌های نجومی زیج الغ بیگ نقل شده دز زیج شاه جهانی[۶] برآمده است که حدود یک دهه پیش‌تر انجام داده بود. به خاطر چنین تأثیری بر نیتیانندا، سروسدهانتراجا از مهم‌ترین منابع ردیابی انتقال اخترشناسی و ریاضیات دورهٔ اسلامی به آموزه‌های سانسکریت در قرن ۱۷ میلادی است.

1. “Determining the Sine of One Degree in the *Sarvasiddhāntarāja* of Nityānanda”, *SCIAMVS*, vol. 19, 2018, pp. 1-52.
2. Clemency Montelle
3. K. Ramasubramanian

۴. کارشناس ارشد تاریخ علم، همکار گروه تاریخ علم بنیاد دائرةالمعارف اسلامی، maryam_zamani77@yahoo.com

۵. در منابع عربی: "سندهند"؛ به معنای آموزه‌ها.

۶. زیج فارسی تألیف فریدالدین در هند در حوالی ۱۰۲۰ق. این زیج را که بر پایهٔ زیج جدید الغ بیگ نوشته شده بود، وزیر شاه جهان (نوهٔ اکبر شاه گورکانی) پسندید و از نیتیانندا خواست که آن را به سانسکریت ترجمه کند. ترجمهٔ سانسکریت آن که سدهانت سندو نام داشت با اقبال عمومی مواجه نشد، از این رو نیتیانندا سروسدهانتراجا را بر پایهٔ آموزه‌های سنتی نگاشت. م

بخش	نام فصل
گانیتا[1]	۱- معقولات فلسفی ۲- موضع میانگین ۳- موضع حقیقی ۴- سه پرسش: جهت، مکان، زمان ۵- ماه گرفتگی ۶- خورشید گرفتگی ۷- ارتفاع درجات ماه ۸- مقارنهٔ ستارگان و سیارات ۹- ارتفاع ستارگان و سیارات بر حسب درجه
گُلا[2]	۱- کیهان‌نگاری ۲- ذات الحلق ۳- ابزارهای نجومی

جدول ۱: محتویات رسالهٔ سروسدهانتراجا

یکی از مباحث نمادین این انتقال مثلثات است. در اوایل اثر، مطالب نیتیانندا دربارهٔ مثلثات آمده، چنان که در بیشتر سدهانت‌ها مرسوم بوده است. او ۶۷ بیت را پیش از آغاز فصل سوم مربوط به موضع حقیقی سیارات به مثلثات اختصاص داده است. این یکی از متن‌های نادری است که به‌تفصیل به مثلثات پرداخته است. چون سروسدهانتراجا اساساً کتابی در مورد اخترشناسی است، نیتیانندا می‌توانست به اجمال به مثلثات بپردازد و تنها جدول سینوس‌ها را بیاورد. اما ترجیح داد آن را به روشی مشروح و نظام‌مند بیان کند. شاید این ناشی از اعتقادات اوست به اینکه فهم درست چارچوب نظری مهم است، نه فقط به عنوان فردی شاغل در علوم بلکه برای آن‌که به عنوان پژوهشگری راستین شناخته شود؛ تمایلی که در همان ابتدا بیان می‌کند:

> «ای معلمان محترم! ریاضی‌دان تنها به کسی می‌گویند که منطق پشت محاسبهٔ جِیب[3] را می‌دانند. پس [با مخاطرهٔ توضیح دادنش،] حتی نادانی چون من آرزوی انجام آن را دارد.»

۱. در زبان سانسکریت، «گانیتا» به معنای «ریاضیات» است. م
۲. در زبان سانسکریت «گُلا» به معنای «کرهٔ سماوی» است. م
۳. برای تمایز بین سینوس امروزی با شعاع یک و هم ارزهای آن در مثلثات هندی با شعاع غیر واحد، جیب را با حرف بزرگ نمایش می‌دهیم یعنی ($R \sin\theta = \mathrm{Sin}\,\theta$). اینجا نیتیانندا شعاع را ۶۰ گرفته است.

ما (مونتل، راماسوبرامانیان و دمالوکا) در مقالهٔ متأخری[1] نخستین بخش این مبحث را بررسی کردیم که در آن نیتیانندا دستورها و روابطی برای تعیین مقدار جیب (سینوس)، جیب تمام (کسینوس) و جیب معکوس کمان‌های گوناگون، دستورهای دو برابر و نصف کمان، به همراه جیب مجموع و تفاضل را در پنج فصل بررسی می‌کند (جدول ۲ را ببینید). با این دستورها هر کسی می‌تواند مقادیر جیب کمان‌های کوچک‌تر، شامل کمان °۳ ولی نه °۱ را بیابد[2].

ابیات	مضمون	
۱۹ تا ۲۳		دیباچه و تعاریف
۲۴ تا ۳۰	فصل ۱	جیب‌های ۹۰، ۳۰ و ۱۸ درجه
۳۱ تا ۳۶	فصل ۲	جیب نصف کمان
۳۷ تا ۴۰	فصل ۳	جیب دو برابر کمان
۴۱ تا ۴۸	فصل ۴	جیب مجموع دو کمان
۴۹ تا ۵۴	فصل ۵	جیب تفاضل دو کمان
۵۵ تا ۵۹		اثبات هم ارزی‌ها با ترسیم هندسی

جدول ۲: ساختار و محتوای پنج فصل نخست دربارهٔ مثلثات

نیتیانندا در فصل ششم به تعیین جیب یک درجه می‌پردازد. او در دیباچه به آن اشاره می‌کند:

> اکنون منطق پشت محاسبات جیب‌ها در پنج فصل بیان شده است. چون تنها ۳۰ جیب وجود دارد، مقادیر دقیق [جیب هر زاویه] از [جیب] ثلث سه درجه (یعنی $\mathrm{Sin}\,1^\circ$) گرفته شده است.

یافتن جیب °۱ برای نیتیانندا خیلی اهمیت داشت چون که جدول جیبی عرضه کرد که متغیرش از °۱ تا °۹۰ تغییر می‌کند. افزون بر این، رسالهٔ سدهانت سندو[3]ی او که متنی همراه با جدول است، شامل مقادیر جیب‌ها تا هر دقیقهٔ کمان است! حتماً نیتیانندا روشی برای محاسبهٔ جیب یک درجه (و بر اساس آن، جیب یک دقیقه که به آن خواهیم پرداخت) داشت، که با آن می‌توانست همهٔ مقادیر را محاسبه کند.

1. Montelle, C., Ramasubramanian, K., Dhammaloka, J., “Computation of Sines in Nityānanda’s *Sarvasiddhāntarāja*”, *SCIAMVS*, 2016, vol. 17, pp. 1-52.

۲. این به کمک ترکیبی از دستورهای سینوس نصف زاویه و سینوس مجموع یا تفاضل به‌سادگی به دست می‌آید. مثلاً از سینوس °۷۲ می‌توانیم سینوس °۳۶ و از آن به کمک سینوس °۱۸ و از آن سینوس °۹ و بعد سینوس °۴/۵ را به دست آوریم. به همین ترتیب، از سینوس °۳۰ می‌توان سینوس °۱۵، سپس سینوس °۷/۵ را یافت. با یافتن سینوس تفاضل بین °۷/۵ و °۴/۵ سینوس °۳ دقیقاً پیدا خواهد شد. معادل همین دستورها برای جیب هم برقرار است.

3. *Siddhāntasindho*

می‌دانیم که جیب ۱° به روش هندسی تعیین نمی‌شود. از این رو نیتیانندا الگوریتمی از بازآرایی دستور جیب چند برابر زاویه عرضه کرد- محاسبه‌ای که منجر به تعیین جیب ۱° با حل معادلهٔ درجهٔ سوم می‌شود. نیتیانندا به عرضهٔ الگوریتم اکتفا نکرد. او علاوه بر عرضهٔ سه راه‌کار برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم، برهان مفصلی برای الگوریتم آورد و همچنین نمودار هندسی و برهان جبری مفصلی فراهم کرد. افزون بر آن، مثال حل شده‌ای با برهانی شبه نمادین برای استخراج دستور مورد نظر آورد. او بحث را با توضیح مختصری دربارهٔ نحوهٔ تعیین جیب ۱° ۰ ;۱ که بر اساس دانسته‌های ما در متون سانسکریت بی‌سابقه است، به پایان برد. این شیوهٔ چند سویهٔ تعیین سینوس ۱° بیانگر روش‌های استدلال، مهارت هندسی هوشمندانه، جبر نمادی ابتدایی، روش‌های بدیع تقریب و تحلیل‌های ترسیمی نیتیانداست.

روش‌هایی که نیتیانندا عرضه کرد به وضوح حاکی از پیوندهایی با مباحث کهن‌تر مربوط به جیب ۱° است. قدیمی‌ترین موردی که می‌شناسیم رساله‌ای عربی منسوب به جمشید کاشانی، اخترشناس ایرانی سدهٔ نهم هجری است، اگرچه اثری به نام رساله في استخراج جیب درجة واحدة تنها منبعی است که روش او را بیان می‌کند و آن هم پس از مرگش نوشته شده است. این رساله را روزنفلد و هوخندایک در سال ۲۰۰۳ ویرایش و ترجمه کرده‌اند. این رساله شامل بیان دو قضیهٔ هندسی مرتبط با حل معادلهٔ درجهٔ سوم (ص ۳۳- ۳۹) و بعد دو روش (هم‌ارز) همراه با اثبات برای یافتن جیب یک درجه، یکی از مؤلفی ناشناس (ص ۳۹-۴۳) و دیگری مربوط به کاشانی است (ص ۴۳- ۵۰). اولی اساساً به روش تکرار از وترها و دومی از جیب‌ها استفاده کرده است.

دومین متن مرتبط، به نثر سانسکریت و شامل مجموعه‌ای از روش‌ها است که ردپایشان به اخترشناس دورهٔ اسلامی، الغ بیگ (۷۹۶- ۸۵۳ق)[1] می‌رسد. این متن که هنوز منتشر نشده است[2] به نام جیاکاپ-اوتپتی[3] شناخته می‌شود و شامل چندین روش مختلف برای یافتن جیب یک درجه است که دست کم دوتایشان مستقیماً به الغ بیگ منتسب هستند.

گرچه استدلال‌های متداول در تمامی این متن‌ها به انتقال شیوه‌ها و روش‌ها از عربی به منابع سانسکریت اشاره دارند، بین این مباحث تفاوت‌های کلیدی موجود است. برای فهم کامل میزان انتقال، دگرگونی و ابتکار در متن‌های بعدی باید مقایسهٔ دقیقی بین هر یک از روش‌های سه رساله انجام شود. در اینجا ترجمهٔ فارسی متن ویراستهٔ انتقادی بر اساس شش نسخهٔ موجود همراه با

---

۱. در مورد «الغ‌بیگ» بنگرید به: میراث علمی، شمارهٔ پیاپی ۵، بهار و تابستان ۱۳۹۸، ص ۱۴۶.
۲. مونتل، پلوفکر و ون بروملن در حال آماده سازی این متن هستند.

3. *Jyācāpa-utpatti*

تحلیل فنی محتوا عرضه می‌کند. این مقاله با عرضهٔ شرح جامعی از کار نیتیانندا پایه‌ای برای فهم بهتر انتقال روش‌ها از منابع عربی به متون سانسکریت فراهم می‌کند.

ترجمه و تحلیل فنی

در ادامه تحلیلی فنی از ترجمهٔ فصل ششم عرضه می‌کنیم.

۱. تعیین جیب یک درجه

اکنون با دانستن جیب کمان، تعیین جیب یک سوم کمان [بیان می‌شود].

با دو برابر کردن جیب ۳ درجه، باید آن را بر سه تقسیم کرد. بعد باید خارج قسمت به دست آمده بر حسب درجه را جداگانه یادداشت کرد. حالا باید مکعب خارج قسمت [جداگانه یادداشت شده] را به مربع شعاع تقسیم کرد و حاصل را به قسمت باقی مانده پس از انداختن درجات (یعنی دقایق، ثوانی الی آخر) افزود. حاصل دوباره باید بر سه تقسیم شود. باقی‌مانده از ردهٔ دقایق خواهد بود و باید در سطر نتایج[1] یادداشت شود. از مکعب حاصل باید مکعب حاصل قبلی را کاست، و دوباره نتیجه را بر مربع شعاع تقسیم کرد.

باقی‌ماندهٔ حاصل از این عملیات به باقی‌ماندهٔ از ردهٔ دقایق، ثوانی الی آخر افزوده و این کار تکرار می‌شود و هر بار حاصل بر سه تقسیم می‌شود. بعد ثوانی را باید کنار نتایج یادداشت کرد و با باقی‌ماندهٔ حاصل از این قسمت همان فرایند تکرار می‌شود. پس از تکرار برای رسیدن به دقت دلخواه، نصف نتیجهٔ موجود در سطر نتایج حاصل جیب 1° را به دست می‌دهد. من آن را به روش دیگری هم توضیح خواهم داد.

دو سوم جیب 3° را جداگانه یادداشت می‌کنیم. مکعبش را بر سه تقسیم می‌کنیم. حاصل را بر مربع شعاع تقسیم می‌کنیم و به حاصل پیشین که به کناری نهاده شده می‌افزاییم؛ فرایند تکرار می‌شود؛ نصف آن [مقدار حاصل از تکرار] جیب یک درجه است.

یک سوم جیب سه درجه را جداگانه می‌نویسیم. یک سوم مکعب آن را بر مربع شعاع تقسیم می‌کنیم و حاصل را به مقدار جدا نوشته شده (یک سوم جیب سه درجه) اضافه می‌کنیم. این روش تکراری مستقیماً جیب یک درجه را می‌دهد.

ریاضی‌دان می‌تواند مقدار دقیق جیب یک سوم کمان را با هر یک از این روش‌ها محاسبه کند.

سینوس سه درجه برابر است با: سه درجه و هشت دقیقه و بیست و چهار ثانیه و سی و سه ثالثه و پنجاه و نه رابعه و سی و چهار خامسه و بیست و هشت سادسه و چهارده سابعه و پنجاه ثامنه.

۱. یعنی سطری که قبلاً درجه‌ها را در آن جداگانه یادداشت کردیم و رقم‌های بعدی حاصل از مراحل تکرار را در آن می‌نویسیم.

تحلیل فنی

ابیات بالا سه الگوریتم تکراری مجزا برای تعیین جیب ۱° به دست می‌دهند. نخستین مورد شامل حل معادلهٔ درجهٔ سوم به روش تکرار است که با استفاده از تقسیم، جواب را رقم به رقم جایگزین می‌کند. دو الگوریتم دیگر هم که از تکرار مستقیم حول نقطهٔ ثابت مشخصی استفاده می‌کنند بر پایهٔ همان معادلهٔ درجهٔ سوم هستند. گرچه ارتباط این سه روش با شیوه‌های پیشین نیاز به وارسی دقیق دارد، ریاضی‌دانان هندی می‌دانستند چگونه با روش‌های سادهٔ تکرار از پس مسئلهٔ وابستگی متقابل برآیند. پیش از بررسی این سه الگوریتم، اتحاد مثلثاتی زیر بنای این الگوریتم؛ را شرح می‌دهیم.

- اتحاد مثلثاتی زیربنای معادلهٔ درجهٔ سوم

دستور چند برابر زاویه که ارتباط کلیدی بین سینوس کمان و سینوس سه برابر آن کمان را می‌دهد و پایهٔ هر سه الگوریتم را تشکیل می‌دهد چنین است:

$$\sin ۳\theta = ۳ \sin \theta - ۴ \sin^۳ \theta \qquad (۱)$$

با استفاده از رابطهٔ $R \sin \theta = \mathrm{Sin}\, \theta$ بین سینوس امروزی و جیب با شعاع غیر واحد، دستور بالا برای جیب‌ها به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathrm{Sin}\, ۳\theta = ۳ \mathrm{Sin}\, \theta - \frac{۴ \mathrm{Sin}^۳ \theta}{R^۲} \qquad (۲)$$

گرچه این رابطه برای هر زاویه‌ای برقرار است، در این فصل نیتیاننداً به تعیین جیب یک درجه توجه دارد. بنابراین با جاگذاری $\theta = ۱^\circ$ و با فرض $y = \mathrm{Sin}\, ۱^\circ$ معادلهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathrm{Sin}\, ۳^\circ = ۳y - \frac{۴y^۳}{R^۲}$$

یا،

$$y = \frac{\mathrm{Sin}\, ۳^\circ}{۳} + \frac{۴y^۳}{۳R^۲} \qquad (۳)$$

در اینجا جیب ۳ درجه که جیب کوچک‌ترین تعداد صحیح درجات است که می‌توان به روشی هندسی محاسبه کرد، معلوم است. نیتیانندا سه روش برای حل معادلهٔ بالا عرضه می‌کند که آن‌ها را به ترتیب در فصل‌های بعد می‌آوریم.

- روش نخست

نخستین روش نیتیانندا مستقیماً با توصیف الگوریتم تکراری برای حل معادلهٔ (۳) آغاز می‌شود. این

الگوریتم بازگشتی به صورتی که در منابع عربی آمده قبلاً تبیین شده است.[۱] اما این نخستین بار است که در متنی سانسکریت با جزئیات بررسی می‌شود.

پیش از بررسی متن سانسکریت، کارکرد این روش را با نمادهای امروزی می‌آوریم. چون منابع عربی از وتر برای این فرایند استفاده کردند، نیتیانندا هم مانند آن‌ها y را در معادلهٔ (۳) دو برابر می‌کند، پس داریم:

$$\text{۲}y = \frac{\text{۲}\mathrm{Sin}\,\text{۳}}{\text{۳}} - \frac{(\text{۲}y)^{\text{۳}}}{\text{۳}R^{\text{۲}}} \qquad (\text{۴})$$[۲]

در سمت چپ $\text{۲}y$ می‌تواند از ارقام شصتگانی متوالی ساخته شود که با P_0, P_1, P_2 و غیره نمایش داده می‌شوند. متن این مؤلفه‌ها را درجه، دقیقه و ثانیه و مانند آن می‌نامد تا نشان دهندهٔ بخش‌های شصتگانی متوالی باشد.

$$\text{۲}y = P_0,\ P_1,\ P_2$$

الگوریتم با تحلیل موشکافانهٔ ساختار معادلهٔ (۴)، هر جزء را تک به تک با روند تکرار فراهم می‌کند. به عبارت دیگر، $\text{۲}y$ در هر تکرار با رقم شصتگانی دیگری دقیق‌تر می‌شود. در هر مرحله از فرایند، با تقسیم مقدار $\text{۲}y$ موجود بر ۲ جیب ۱° به دست می‌آید.

- توصیف الگوریتم روش نخست

چون y کوچک است، به عنوان اولین تقریب با نادیده گرفتن $y^{\text{۳}}$، معادلهٔ (۴) به صورت $\text{۲}y \approx \frac{\text{۲}\sin\text{۳}}{\text{۳}}$ نوشته می‌شود. این تقسیم مقدار خارج قسمت (P_0) و باقی ماندهٔ (r_0) را به دست می‌دهد $\text{۲}y \approx \frac{\text{۲}\sin\text{۳}}{\text{۳}} = P_0 + \frac{r_0}{\text{۳}}$ که P_0 نخستین رقم شصتگانی حاصل از تقسیم است (در متن: درجات خارج قسمت) و r_0 باقی‌ماندهٔ تقسیم است. پس P_0 در سطر نتایج نوشته می‌شود.

---

۱. بنگرید به:

Van Brummelen, G., *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton, NJ, 2009, pp. 147-149.

Rosenfeld, B. A., Hogendijk, J. P., “A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg”, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, 2003, 15, pp. 25-65.

همچنین بنگرید به: «جمشید کاشانی و محاسبهٔ سینوس زاویهٔ یک درجه به روش تکراری»، اسگر آبو، ترجمهٔ محمد باقری، وقف میراث جاویدان، شمارهٔ ۱۵ و ۱۶، پاییز و زمستان ۱۳۷۵، ص ۳۵–۳۸؛ فاطمه سوادی، بررسی روش کاشانی در محاسبهٔ جیب یک درجه بر اساس رسالة في استخراج جيب درجة واحدة، پایان‌نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی‌ارشد به راهنمایی هادی عالم‌زاده، دانشکدهٔ الهیات دانشگاه تهران، ۱۳۸۴؛ همو، «رساله‌ای فارسی دربارهٔ محاسبهٔ جیب یک درجه»، تاریخ علم، شمارهٔ ۶، بهار و تابستان ۱۳۸۷، ص ۶۹–۱۰۴؛ فاطمه دوست‌قرین، «رسالهٔ میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویه»، تاریخ علم، شمارهٔ ۸، بهار و تابستان ۱۳۸۸، ص ۱–۲۹.

۲. توجه کنید که $\text{۲}\sin\theta = \frac{\text{۲}\sin\text{۳}\theta + (\text{۲}\sin\theta)^{\text{۳}}}{\text{۳}}$ براساس اتحاد $\text{۲}\sin\theta = \mathrm{crd}\,\text{۲}\theta$ هم‌ارز است با $\mathrm{crd}\,\text{۲}\theta = \frac{\mathrm{crd}\,\text{۶}\theta + (\mathrm{crd}\,\text{۲}\theta)^{\text{۳}}}{\text{۳}}$ که در متن اصلی عربی آمده است. crd علامت اختصاری وتر (chord) است.

حال $P_{\circ}$ برای یافتن دومین رقم شصتگانی $P_{۱}$ به کار می‌رود $\frac{r_{\circ} + \frac{(P_{\circ})^{۳}}{R^{۲}}}{۳} = P_{۱} + \frac{r_{\circ}}{۳}$.
خارج قسمت $P_{۱}$ بعد از $P_{\circ}$ به سطر نتایج افزوده می‌شود. بعد سومین رقم معنی‌دار شصتگانی $P_{۲}$ از رابطهٔ

$$\frac{r_{۱} + \frac{(P_{\circ}, P_{۱})^{۳} - (P_{\circ})^{۳}}{R^{۲}}}{۳} = P_{۲} + \frac{r_{۲}}{۳}$$

یافته می‌شود. بنابراین پس از دومین تکرار، سطر نتایج سه رقم دارد: $۲y \approx P_{\circ}, P_{۱}, P_{۲}$.

باز با $r_{۲}$ و رقم‌های سطر نتایج، چهارمین رقم معنی‌دار شصتگانی $P_{۳}$ از رابطهٔ

$$\frac{r_{۲} + \frac{(P_{\circ}, P_{۱}, P_{۲})^{۳} - (P_{\circ}, P_{۱})^{۳}}{R^{۲}}}{۳} = P_{۳} + \frac{r_{۳}}{۳}$$

یافته می‌شود. فرایند بالا می‌تواند بسته به دقت مورد نظر هرچند بار انجام شود. در تکرار n ام P_{n} از رابطهٔ

$$\frac{r_{n} + \frac{(P_{\circ}, ..., P_{n-۱})^{۳} - (P_{\circ}, ..., P_{n-۲})^{۳}}{R^{۲}}}{۳} = P_{n} + \frac{r_{n}}{۳}$$

به دست می‌آید. پس بعد از n تکرار، سطر نتایج چنین خواهد بود:

$$۲y \approx P_{\circ}, P_{۱}, P_{۲}, ..., P_{n}$$

و با تقسیم بر ۲ مقدار مطلوب جیب ۱° حاصل می‌شود.

- ارزیابی عددی ارقام شصتگانی متوالی روش نخست

چون نیتیاننتدا صرفاً الگوریتم را توصیف می‌کند بی آنکه مقدار عددی جیب ۱° را در ابیات این قسمت معلوم کند، برای تکمیل مطلب فرایند تکرار را چند بار انجام می‌دهیم تا نشان دهیم اعداد چگونه به دست می‌آیند. تنها مقدار عددی که نیتیاننتدا داده است مقدار جیب ۳° در بیت ۶۶ است. مقدارش در دستگاه شصتگانی چنین است:

$$\text{Sin}\, ۳^{\circ} = ۳;\ ۰۸,\ ۲۴,\ ۳۳,\ ۵۹,\ ۳۴,\ ۲۸,\ ۱۴,\ ۵۰ \qquad (۵)$$

جالب اینکه این مقدار با مقداری که کاشانی داده متفاوت است، او به جای ۵۰، در رقم هشتم شصتگانی ۲۹ داده است (روزنفلد و هوخندایک، ۲۰۰۳، ص ۴۵، شمارهٔ ۵۷). اما مقدار داده شده در (۵) در قسمت ابتدایی این متن آمده است (روزنفلد و هوخندایک، ۲۰۰۳، ص ۳۹) و در نسخهٔ جیاکاپ هم که در آغاز مقاله ذکر شد به آن اشاره شده است.

ارقام نخستین را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

برای یافتن $P_{\circ}$: در تقریب مرتبهٔ صفر، $P_{\circ}$ صرفاً یک سوم مقدار وتـر ۶° $(crd۶ = ۲\sin ۳)$ گرفته می‌شود.

$$\frac{۲\ \text{Sin}\ ۳}{۳} = \frac{۲\times ۳;۰۸,۲۴,۳۳,۵۹,...}{۳} = ۲;۰۵,۳۶,۲۲,۳۹,۴۲,..., = p_{\circ} + \frac{r_{\circ}}{۳}$$

در اینجا $P_{\circ} = ۲$ بر حسب درجه و باقی‌مانـده $\frac{r_{\circ}}{۳} = ۵,۳۶,۲۲,۳۹,۴۲,...$ بـر حسـب دقیقـه، ثانیه، الی آخر است، پس $r_{\circ} = ۱۶;۴۹,۰۷,۵۹,۰۸,۵۸,...$ بر حسب دقیقه الی آخر.

سطر نتایج در این مرحله تنها شامل ۲ است. یعنی $P_{\circ} = ۲ \approx ۲y$.

برای یافتن $P_{۱}$:

$$\frac{r_{\circ} + \frac{(P_{\circ})^{۳}}{R^{۲}}}{۳} = \frac{۰;۱۶,۴۹,۰۷,۵۹,۸,۵۶,... + \frac{۲^{۳}}{۶۰^{۲}}}{۳} = \frac{۰;۱۶,۴۹,۰۷,۵۹,۰۸,۵۶,... + ۰;۰۰,۰۸}{۳} = \frac{۰;۱۶,۵۷,۰۷,۵۹,۰۸,۵۶,...}{۳} = ۰;۰۵,۳۹,۰۲,۳۹,۴۲ = P_{۱} + \frac{r_{۱}}{۳}$$

در اینجا $P_{۱} = ۵$ بر حسب دقیقه و باقی‌مانده $\frac{r_{۱}}{۳} = ۳۹,۰۲,۳۹,۴۲,...$ بر حسب ثانیه، ثالثه، الی آخر است، پس $r_{۱} = ۱,۵۷,۰۷,۵۹,۰۸,...$ بر حسب دقیقه الـی آخـر. سـطر نتـایج در ایـن مرحلـه $P_{\circ}\,P_{۱} = ۲,۵ \approx ۲y$ است.

برای یافتن $P_{۲}$:

$$\frac{r_{۱} + \frac{(P_{\circ},P_{۱})^{۳} - (P_{\circ})^{۳}}{R^{۲}}}{۳} = \frac{۰;۰۱,۵۷,۰۷,۵۹,۰۸,۵۶,.. + \frac{(۲;۰۵)^{۳} - ۲^{۳}}{۶۰^{۲}}}{۳} = \frac{۰;۰۱,۵۸,۱۰,۳۱,۱۳,۵۶}{۳} = ۰;۰۰,۳۹,۰۲,۲۳,۳۰,۲۴,۳۸,..., = P_{۲} + \frac{r_{۲}}{۳}$$

در اینجا $P_{2} = ۳۹$ بر حسب ثانیه و باقی‌مانده $\frac{r_2}{۳} = ۲,۲۳,۳۰,۲۴,۳۸,...$ بر حسب ثالثه، رابعه، الی آخر است.

اکنون سطر نتایج چنین است: $۲y \approx P_0, P_1, P_2 = ۲,۰۵,۳۹$. این فرایند را به تعداد دفعات دلخواه می‌توان تکرار کرد. با نصف کردن نتیجهٔ اخیر داریم: $y = \text{Sin}\,۱^\circ = ۱,۰۲,۴۹$.

دقیق‌ترین مقداری که نیتیانندا برای جیب ۱° ثبت کرده، در جدول جیب‌های او در سروسدهانتراجا آمده است. این مقدار عددی چنین است: $۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱$.

هر چند مقدار جیب ۳° که نیتیانندا داده است تا هشت رقم دقت دارد، معلوم است که در صورت لزوم می‌توانست رقم‌های بیشتری را هم محاسبه کند.

- روش دوم:

دومین روش نیتیانندا برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم هم یک فرایند تکراری است ولی در هر تکرار به جای یافتن یک به یک ارقام شصتگانی متوالی تابع در هر تکرار تقریب بهتری برای مقدار خود تابع به دست می‌آورد. در اینجا هم دستور نیتیانندا با تقریبی مقدماتی شروع می‌شود: جیب ۳° منهای یک سوم آن، که هم ارز ضرب آن در ۲ و تقسیم بر ۳ طبق معادلهٔ (۴) است:

$$y_0 = \frac{۲\sin ۳}{۳} \qquad (۶)$$

به این مقدار مکعب خودش تقسیم بر ۳ برابر مربع شعاع افزوده می‌شود تا تکرار بعدی به دست آید:

$$y_1 = y_0 + \frac{۲{y_0}^۳}{۳R^۲}$$

اکنون از y_1 برای یافتن مقدار مربوط به تکرار بعدی استفاده می‌کنیم. یعنی

$$y_2 = y_0 + \frac{۲{y_1}^۳}{۳R^۲}$$

تکرار بعدی چنین خواهد بود:

$$y_n = y_0 + \frac{(y_n - ۱)^۳}{۳R^۲} \qquad (۷)$$

چون مقادیر سریع همگرا می‌شوند، روند تکرار با رسیدن به دقت دلخواه یعنی $y_{n+1} \approx y_n$ پایان می‌پذیرد، و جیب ۱° با نصف کردن این مقدار یافته می‌شود.

- ارزیابی عددی روش دوم

این مورد خاص را با بازسازی عددی معادلات (۵) و (۶) آغاز می‌کنیم. تقریب مقدماتی این تابع

چنین است:

$$y_{\circ} = \frac{۲\sin ۳}{۳} = \frac{۲}{۳} \times ۳;۰۸,۲۴,۳۳,۵۹,۳۴,۲۸,۱۴,۵۰, = ۲;۰۵,۳۶,۲۲,۳۹,۴۲,۵۸,۴۹,۵۳,۲۰.$$

مقادیر تقریب‌های متوالی حاصل از معادلهٔ (۷) در جدول ۵ آمده است. چنان‌که از روی سومین ستون جدول ۵ مشخص است، تفاضل‌های متوالی به سرعت کاهش می‌یابند. امروزه می‌دانیم که اگر تخمین اولیه درست اختیار شود، روش‌های تکرار حول نقطهٔ ثابت به‌سرعت همگرا می‌شوند. پس روش دوم را می‌توان از نوع تکرار حول نقطهٔ ثابت برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم در نظر گرفت.

شمارهٔ تکرار (n)	$\text{Sin}\,۱^{\circ} = \frac{y_n}{۲}$	اختلاف $= \frac{y_n - y_{n-۱}}{۲}$
۰	۱;۰۲,۴۸,۱۱,۱۹,۵۱,۲۹,۲۴,۵۶,۴۰	
۱	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۰۴,۳۲,۰۰,۵۳,۳۷,۳۷	۰;۰۰,۰۱,۳۱,۴۴,۴۰,۳۱,۲۸,۴۰,۵۷
۲	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۱۴,۵۰,۰۴,۳۹	۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۶,۴۲,۱۳,۵۶,۲۷,۰۲
۳	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۴,۱۷,۱۰	۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۲۹,۲۴,۱۲,۳۱
۴	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۶,۲۶,۰۸	۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۲,۰۸,۵۸
۵	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۶,۲۶,۱۷	۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۹
۶	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۶,۲۶,۱۷	۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰
۷	۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۶,۲۶,۱۷	۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰

جدول ۵: تقریب متوالی برای جیب که با روش دوم به دست آمده است.

- روش سوم:

از دیدگاه ریاضی این روش مشابه روش دوم است، جز آن‌که خبری از ضرب و تقسیم بر ۲، پیش و پس از تکرارها نیست. اگر چنین است، چرا نیتیانندا آن را به عنوان گزینهٔ دیگری برای تعیین جیب ۱° عرضه کرده است؟ چنان‌که قبلاً گفته شد ضریب ۲ بی شک ردی از تمایل منابع دورهٔ اسلامی برای حل این مسئله بر حسب وترهاست. مثلثات هندی، از همان آغاز، کار با جیب را پذیرفت، که در این صورت این ضریب نالازم است. پس تقریب مقدماتی جیب ۱° به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y_{\circ} = \frac{\sin ۳}{۳}$$

تکرارهای بعدی چنین خواهند بود:

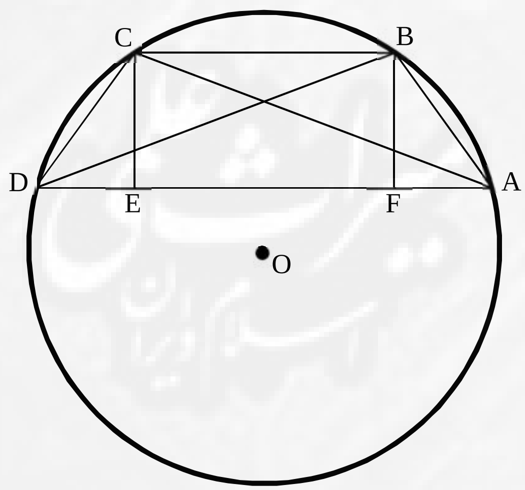
$$y_n = y_\circ + \frac{(y_n - 1)^3}{3R^2}$$

در اینجا تکرارهای متوالی مستقیماً تقریب جیب 1° را می‌سازند. چون مقادیر عددی به دست آمده به این روش تفاوتی با مقادیر جدول (۵) ندارند، آن‌ها را جداگانه جدول‌بندی نمی‌کنیم.

۲. برهان هندسی

- ترسیم چهارضلعی محاطی با سه ضلع برابر

نیتیانندا با داشتن الگوریتم بازگشتی برای جیب 1° ، در پی اعتبار بخشیدن به معادلهٔ درجه سوم با ملاحظهٔ ترسیمی هندسی بود که به معادلهٔ (۴) ختم شود. به این منظور ابتدا باید دایره‌ای با شعاع نسبتاً بزرگ بکشیم تا شکل‌های هندسی لازم مختلف به راحتی در آن جا شوند (شکل ۱).

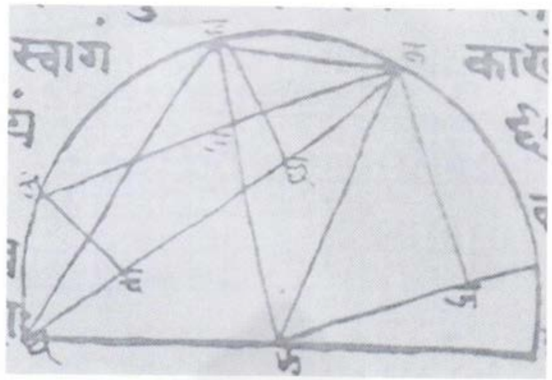


شکل ۱

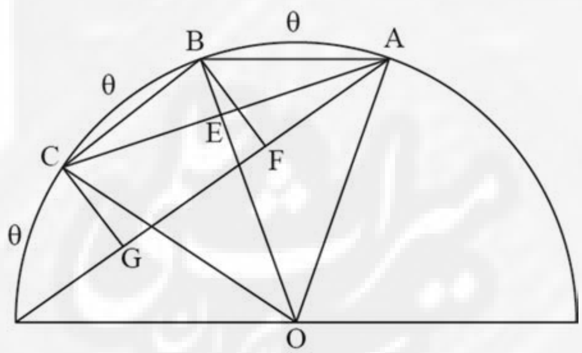
O مرکز دایره است. کمانی به اندازهٔ دلخواه را به سه قسمت تقسیم و ABCD نام‌گذاری می‌کنیم. بعد A و D را وصل می‌کنیم تا ذوزنقه‌ای با سه ضلع برابر به دست آید. قاعدهٔ ذوزنقه AD است.

اکنون قطرهای AC و BD از ذوزنقه و عمودهای CE و BF در شکل دیده می‌شود. گرچه نیتیانندا از خواننده می‌خواهد که دایرهٔ کاملی بکشد، اما در نسخه‌های خطی قابل دسترس تنها نیمی از دایره کشیده شده است. شکل ۲ تصویر موجود در یکی از نسخه‌هاست. برای وضوح بیشتر آن را دوباره در شکل ۳ کشیده‌ایم.[1]

۱. احتمالاً برای جا شدن در فضای کوچکتری نیم‌دایره کشیده‌اند.



شکل ۲: شکل موجود در نسخهٔ خطی



شکل ۳: بازسازی شکل ۲

- تعریف مثلث‌ها و اجزای آن‌ها درون چهارضلعی محاطی

نیتیانندا با بیان مشروح ترسیم چهارضلعی محاطی، برای تأکید بر مقادیری که در بخش بعدی با آن‌ها سر و کار داشت، شکل حاصل را با روشی که تا اندازه‌ای متفاوت بود بررسی کرد. او توجه خواننده را به مثلث غیر قائم‌الزاویهٔ ABC درون ذوزنقه جلب کرد و قاعدهٔ AC، ساق‌های AB و BC و ارتفاع مثلث یعنی BE را مشخص کرد. سپس در دو بیت، ارتباط این پاره‌خط‌ها را با هم‌ارزهای مثلثاتی‌شان نشان داد. به‌ویژه AE جیب، EO جیب تمام (کسینوس) و BE که سهم است. این کمیت‌ها در عملیات جبری که در پی می‌آیند مهمند.

۳. تحلیل فنی استخراج جبری

- نمایش مربع قطر چهارضلعی محاطی

در این قسمت نیتیانندا با دستور طول ساق ذوزنقهٔ محاطی (که در بخش پیشین تعریف شده) شروع می‌کند و ارتباط ریاضی بین قطعه خط‌های AF و FD را عرضه می‌کند (به شکل ۳ بنگرید):

$$AF = (AD - BC) / ۲$$

$$FD = AD - AF$$

یا معادل آن:

$$AG = AD - DG$$

در شکل ۳ دیده می‌شود که تصویر BC روی قاعدهٔ AD پاره‌خط FG است که بی ارتباط با کمان AD تنها به پاره‌خط‌های AF و DG متصل است. ضمناً تصویر AC روی AG می‌افتد.

اکنون از قضیهٔ فیثاغورس طول BF به دست می‌آید:

$$BF^۲ = CG^۲ = AB^۲ - AF^۲ \qquad (۸)$$

و اندازهٔ قطر چنین محاسبه می‌شود:

$$BD^۲ = BF^۲ + DF^۲ \qquad (۹)$$

نیتیانندا سپس می‌گوید حاصل‌ضرب قاعده‌ها که به مربع وتر افزوده شود، مربع قطر را خواهد داد. برهانش را در اینجا ذکر می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ (۸) در معادلهٔ (۹) این جمله را بازنویسی می‌کنیم:

$$BD^۲ = AB^۲ - AF^۲ + DF^۲ \qquad (۱۰)$$

اکنون دو جملهٔ آخر سمت راست را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} BD^۲ &= AB^۲ + (DF - AF)(DF + AF) \\ &= AB^۲ + (DF - DG) \cdot AD \\ &= AB^۲ + GF \cdot AD \\ &= AB^۲ + BC \cdot AD \end{aligned}$$

زیرا $AF = DG$. این نخستین عبارت برای مربع قطر است که نیتیاننداآورده است. بازنویسی آن با جیب و وتر چنین خواهد بود:

$$BD^۲ = (Crd\,\theta)^۲ + (Crd\,\theta) \cdot (Crd\,۳\theta) \qquad (۱۱)$$ [۱]

- نمایش دیگری برای قطر چهارضلعی محاطی

نیتیاننده برای دستیابی به نمایش دیگر مربع قطر، چند رابطه را یادآوری می‌کند. کار را با این رابطه‌ها آغاز می‌کند:

$$R - Vers\theta = \big(R - (R - Cos\theta)\big) = Cos\theta \qquad (۱۲)$$

---

۱. $Crd\,\theta$ یعنی وتر θ.

و $R^۲ - Cos^۲\theta = Sin^۲\theta$

سپس می‌گوید مجموع مربعات جیب و جیب معکوس ($Vers\theta = R - Cos\,\theta$) برابر است با حاصل‌ضرب قطر و جیب معکوس. با نمادگذاری نوین:

$$Sin^۲\theta + Vers^۲\theta = DVers\theta \qquad (۱۳)$$

که به آسانی قابل تحقیق است.

$$\begin{aligned} DVers\,\theta &= ۲RVers\,\theta \\ &= ۲R(R - Cos\,\theta) \\ &= R^۲ + R^۲ - ۲R\,Cos\,\theta \\ &= Sin^۲\,\theta + Cos^۲\,\theta + R^۲ - ۲R\,Cos\,\theta \\ &= Sin^۲\,\theta - (R - Cos\,\theta)^۲ \\ &= Sin^۲\theta + Vers^۲\theta \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

اکنون رابطهٔ (۱۳) را بازنویسی می‌کنیم: $Vers\theta = \dfrac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D}$

طرفین را از شعاع می‌کاهیم:

$$R - Vers\theta = R - \frac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D}$$

و بعد طرفین را مجذور و نتیجه را ساده می‌کنیم:

$$(R - Vers\theta)^۲ = \left(R - \frac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D}\right)^۲$$

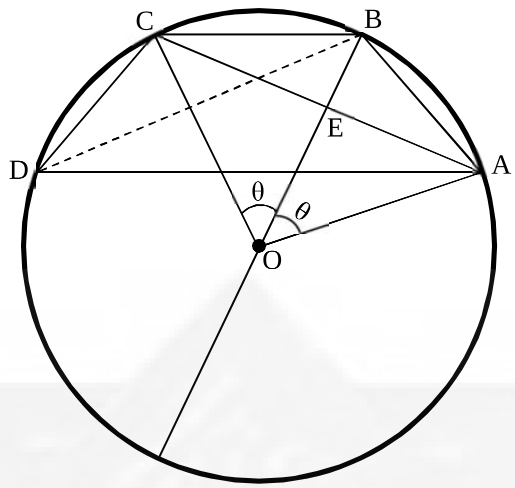
$$Cos^۲\,\theta = R^۲ - ۲R\;\frac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D} + \left(\frac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D}\right)^۲$$

$$R^۲ - Cos^۲\theta = ۲R\,.\frac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D} - \left(\frac{Sin^۲\theta + Vers^۲\theta}{D}\right)^۲$$

$$= Sin^۲\theta + Vers^۲\theta - \frac{(Sin^۲\theta + Vers^۲\theta)^۲}{۴R^۲}$$

دو طرف را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$۴Sin^۲\theta = ۴(Sin^۲\theta + Vers^۲\theta) - \frac{(Sin^۲\theta + Vers^۲\theta)^۲}{R^۲} \qquad (۱۵)$$



شکل ۴ بازسازی ذورنقهٔ مذکور در متن

چون قطرهای BD و AC برابرند با $\mathrm{Sin}\,\theta + \mathrm{Sin}\,\theta = ۲\mathrm{Sin}\,\theta$، پس سمت چپ معادلهٔ بالا مربع BD است:

$$BD^{۲} = ۴\,(\mathrm{Sin}^{۲}\theta + \mathrm{Vers}^{۲}\theta) - \frac{(\mathrm{Sin}^{۲}\theta + \mathrm{Vers}^{۲}\theta)^{۲}}{R^{۲}}$$

$$= ۴\,(\mathrm{Crd}\theta)^{۲} - \frac{(\mathrm{Crd}^{۲}\theta)^{۲}}{R^{۲}} \qquad (۱۶)$$

اکنون دو معادلهٔ (۱۱) و (۱۶) را داریم که مربع قطر چهارضلعی محاطی را می‌دهند. نیتیانندا می‌گوید طرفین را معادل می‌گیریم و با عملیات جبری به نتیجهٔ دلخواه می‌رسیم.

- نمایش اندازهٔ وتر

با برابر گرفتن دو معادلهٔ (۱۱) و (۱۶) خواهیم داشت:

$$(\mathrm{Crd}\,\theta)^{۲} + \mathrm{Crd}\,\theta.\,\mathrm{Crd}\,۳\,\theta = ۴(\mathrm{Crd}\,\theta)^{۲} - \frac{(\mathrm{Crd}^{۲}\theta)^{۲}}{R^{۲}} \qquad (۱۷)$$

به جای $\mathrm{Crd}\theta$ها y می‌گذاریم و به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$y^{۲} + y.\,\mathrm{Crd}\;۳\theta = ۴y^{۲} - \frac{(y^{۲})^{۲}}{R^{۲}}$$

با تقسیم طرفین بر y داریم: $y + \mathrm{Crd}\;۳\theta = ۴y - \dfrac{y^{۳}}{R^{۲}}$

نیتیانندا در ادامه به فرایند بازآرایی جملات معادلهٔ بالا اشاره می‌کند و می‌گوید که جملهٔ مکعب

باید به طرف دیگر برود که مقدار عددی کمیت ($\mathrm{Crd}\,۳\theta$) معلوم است. با نمادهای امروزی:

$$۳y = \mathrm{Crd}\,۳\theta + \frac{y^{۳}}{R^{۲}}،$$

$$y = \frac{\mathrm{Crd}\,۳\theta}{۳} + \frac{y^{۳}}{۳R^{۲}} \qquad (۱۸)$$

او می‌گوید با این مرتب‌سازی مقدار نامعلوم در معادلهٔ (۱۸) که جملهٔ مکعب است، باید معلوم شود. در ابیات بعدی به طور خلاصه دوباره نحوهٔ حل این معادله به روش تکرار آمده است.

- روش تکرار برای یافتن طول وتر

این بخش با سه بیت به پایان می‌رسد که مراحل اجرای هر روش را پس از یافتن رابطه‌های فوق یادآوری می‌کنند. مرحلهٔ نخست استفاده از تقریب اولیهٔ یک سوم قاعده است:

$$\frac{\mathrm{Crd}\,۳\theta}{۳} \qquad (۱۹)$$

این مرحلهٔ مشترکی برای کار با هر فرایند تکرار است. چکیدهٔ روش دوم و سوم و بعد خلاصهٔ روش اول در اینجا آمده است. این بخش با تذکری به ریاضی‌دانان پایان می‌یابد که می‌توانند روش تکرار را تا رسیدن به دقت دلخواه ادامه دهند.

۴. یک مثال حل شده

بیان مثال به زبان امروزی چنین است:

مجهول را با y نشان می‌دهیم که اندازهٔ وتر است: $\mathrm{Crd}\,\theta = AB = y$

آن را از قاعده کم می‌کنیم، می‌شود: b-y.

نصف آن می‌شود $\frac{b-y}{۲}$ و آن را هم از قاعده کم می‌کنیم: $b-(\frac{b-y}{۲}) = \frac{b+y}{۲}$

برای یافتن ارتفاع، مربع $\frac{b-y}{۲}$ را از $y^{۲}$ کم می‌کنیم:

$$y^{۲}-(\frac{b-y}{۲})^{۲} = \frac{۳y^{۲}+۲by-b^{۲}}{۴}$$

از روابط اخیر مجذور ارتفاع (CG) به دست می‌آید:

$$(\frac{۳y^{۲}+۲by-b^{۲}}{۴})+(\frac{b^{۲}+۲by+y^{۲}}{۴}) = y^{۲}+by$$

این مجذور وتر AC است؛ یعنی $AC^{۲} = AG^{۲}+CG^{۲}$.

پس مجذور وتر برابر است با حاصل‌ضرب دو قاعدهٔ ذوزنقه به علاوهٔ مجذور یک ساق ذوزنقه:

$$AC^{2} = y^{2} + by \qquad (20)$$

نیتیانندا برای یافتن معادلهٔ درجهٔ سوم مطلوب بر حسب y روش دیگری برای یافتن مربع وتر عرضه می‌کند. دو عبارت برای یافتن وتر را می‌توان مساوی قرار داد و در نهایت به معادلهٔ درجهٔ سوم رسید.

برای روش دوم نیتیانندا جیب معکوس را بر حسب وتر و قطر بیان کرده است. او در آغاز یادآوری می‌کند که:

$$\text{مربع وتر} = y^{2}$$

حال اگر y وتر زاویهٔ θ و D قطر باشد، جیب معکوس چنین خواهد بود:

$$\operatorname{Vers}\theta = \frac{y^{2}}{D}$$

اما روشن است که: $R - \operatorname{Vers}\theta = \operatorname{Cos}\theta$

پس جیب تمام (کسینوس) برابر است با $\frac{D}{2} - \frac{y^{2}}{D} = \frac{-2y^{2} + D^{2}}{2D}$ و مجذور آن می‌شود:

$$\frac{4(y^{2})^{2} - 4y^{2}D^{2} + (D^{2})^{2}}{4D^{2}}$$

سپس حاصل را از مجذور شعاع کم می‌کنیم:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^{2} - \frac{4(y^{2})^{2} - 4y^{2}D^{2} + (D^{2})^{2}}{4D^{2}} = \frac{4y^{2}D^{2} - 4(y^{2})^{2}}{4D^{2}}$$

نیتیانندا می‌گوید اگر حاصل اخیر را در ۴ ضرب کنیم، مجذور وتر (AC) حاصل می‌شود:

$$\text{مجذور وتر} = \frac{4y^{2}D^{2} - 4(y^{2})^{2}}{D^{2}} \qquad (21)$$

اکنون نیتیانندا دو نمایش وتر را مساوی می‌گیرد:

$$y^{2} + by = \frac{4y^{2}D^{2} - 4(y^{2})^{2}}{D^{2}}$$

طرفین را در D^{2} ضرب می‌کنیم: $D^{2}y^{2} + D^{2}by = 4D^{2}y^{2} - 4y^{4}$

بعد از تقسیم طرفین بر y داریم:

$$D^{2}y + D^{2}b = 4D^{2}y - 4y^{3}$$
$$4y^{3} + D^{2}b = 3D^{2}y$$

و سرانجام به معادلهٔ درجهٔ سوم مطلوب می‌رسیم:

$$y^{3} + bR^{2} = 3yR^{2}$$

۵. یافتن جیب یک دقیقه از جیب یک درجه

این بخش پایانی که نیتیانندا کارش را در مورد جیب‌ها به انجام می‌رساند، شامل روش هوشمندانه‌ای برای یافتن جیب یک دقیقه از روی جیب یک درجه است. این مسئلهٔ آسانی نیست چون یافتن مقدار جیب یک دقیقه با استفاده از دستور نصف زاویه یا هر روش هندسی دیگر ناممکن است. قاعده‌های مجموع و تفاضل را هم نمی‌توان مستقیماً به کار گرفت. هیچ رابطهٔ تحلیلی یا روش عددی شناخته‌شده‌ای نمی‌تواند منجر به یافتن مقدار دقیق جیب چنین کمان کوچکی شود. پس باید به روشی تقریبی متوسل شد. روش ساده‌تر آن است که به خاطر کوچکی جیب یک دقیقه از تقریب خطی استفاده کنیم که به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\mathrm{Sin}\ \text{۰;۰۱}^\circ = \frac{\text{۱}}{\text{۶۰}}\ \mathrm{Sin}\ \text{۱}^\circ$$

اما چون این تقریب ساده راضی‌کننده نبود، نیتیانندا روشی را بر پایهٔ رابطهٔ زیر عرضه کرد:

$$\frac{\text{۱}}{\text{۶۰}} = \left(\frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}\right)\frac{\text{۱}}{\text{۱۶}} = \frac{\text{۱}}{\text{۶۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۶۰}}.\frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}$$

چون جیب یک درجه معلوم است، با استفاده از دستور نصف زاویه و بدون استفاده از تقریب می‌توان جیب $\frac{\text{۱}}{\text{۱۶}}$ آن را به دست آورد. پس از به دست آوردنش با تقریب خطی می‌توان $\frac{\text{۱}}{\text{۶۰}}$ آن را یافت، و با این کار خطا را، دست کم از نظر مقدار، یک مرتبه کاهش داد.

توصیف نیتیانندا از این روش تا حدی فشرده است. آن‌چه در بازسازی روشی که نیتیانندا در این‌جا عرضه کرده است اهمیت دارد آن است که به داده‌های عددی جدول‌های جیب در اثر دیگری از خودش به نام سدهانت سندو ارجاع داده و در آن مقادیر جیب را تا دقت دقیقه جدول بندی کرده است. مقادیر دقیق داده شده برای جیب ۰;۰۱° کمک می‌کند تا بی شک تصدیق کنیم تفسیرمان از این ابیات درست است.

جدول جیب موجود در سدهانت سندو درجات را در ستون‌های افقی و دقایق را در ستون عمودی جدول آورده است. در این بازسازی شناسهٔ جیب‌ها از ۰° تا ۱۴° در ستون‌های افقی جدول و از ۰;۰۰° تا ۰;۱۹° در ستون‌های عمودی آن داده است. تفاضل‌های متوالی بین مقادیر دقایق قاعدتاً به منظور درون‌یابی برای کمان‌های با اجزاء دقیق‌تر از دقیقه به رنگ قرمز داده شده‌اند.

مقدار جیب برای ۱° چنین داده شده است: ۱;۰۲,۴۹,۴۳,۱۱

جیب $۰;۰۱^{\circ}$ (یک دقیقه) هم به صورت زیر آمده است:[1]

$$۰;۱,۰۲,۴۹,۵۵$$

فرض می‌کنیم روش بیان شده در این‌جا همان باشد که مقادیر مذکور در جدول را تولید کرده است. این روش بر دو فرض بنا نهاده شده است که جزئیاتش را می‌آوریم. بحث را با توصیف روشی که نیتیاناندا طرح کرده است آغاز می‌کنیم.

نیتیاناندا می‌گوید جیب کمان $۰;۰۱^{\circ}$ منهای $\frac{۱}{۱۶}$ آن را بیابیم. چون $\frac{۱}{۱۶}$ از $۰;۰۱^{\circ}$ می‌شود $۰;۰۰,۰۳,۴۵^{\circ}$ ، داریم:

$$\mathrm{Sin}\,(۰;۰۱,۰۰,۰۰^{\circ}-۰;۰۰,۰۳,۴۵^{\circ})=\mathrm{Sin}\,(۰;۰۰,۵۶,۱۵^{\circ})$$

با کاربرد پیاپی دستور نصف کمان، قاعده‌ای که نیتیاناندا قبلاً آورده است، مقدار اخیر به آسانی معلوم می‌شود:

$$\mathrm{Sin}\,(\frac{\theta}{۲})=\frac{\sqrt{D\,.\,\mathrm{Vers}\,\theta}}{۲}$$

با کاربرد دستور نصف کمان برای جیب ۱° تنها در دو مرحله می‌توان دقیقاً به مقدار جیب $۰;۱۵^{\circ}$ دست یافت. با آن می‌توان مقدار عددی نصف کمان‌های پیاپی را با دقت شش مرتبهٔ شصتگانی به صورت زیر بازسازی کرد:

n	مقدار عددی $\mathrm{Sin}\,(\frac{۱}{۲^{n}}^{\circ})$
۱	$\mathrm{Sin}\,(۰;۳۰^{\circ})=۰;۳۱,۲۴,۵۵,۵۳,۰۰,...$
۲	$\mathrm{Sin}\,(۰;۱۵^{\circ})=۰;۱۵,۴۲,۲۸,۲۹,۱۷,...$
۳	$\mathrm{Sin}\,(۰;۷,۳۰^{\circ})=۰;۰۷,۵۱,۱۴,۱۸,۴۱,...$
۴	$\mathrm{Sin}\,(۰;۳,۴۵^{\circ})=۰;۰۳,۵۵,۳۷,۰۹,۵۰,...$
۵	$\mathrm{Sin}\,(۰;۱,۵۲,۳۰^{\circ})=۰;۰۱,۵۷,۴۸,۳۴,۵۹,...$
۶	$\mathrm{Sin}\,(۰;۰,۵۶,۱۵^{\circ})=۰;۰۰,۵۸,۵۴,۱۷,۳۰,...$

۱. هر دوی این مقادیر در زیج الغ بیگ هم داده شده است.

نیتیاننداا سپس می‌گوید یک شانزدهم جیب ۱° را که $۰,۰۳,۴۵^\circ$ است به ۶۰ تقسیم کنیم. این دقت بر این فرض بنا شده که کمان مورد نظر آن قدر کوچک است که می‌توان فرض کرد $\mathrm{Sin}\,\theta = \theta$، که چون با کمان‌هایی کوچک‌تر از ۱° سر و کار داریم، درست است، پس:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۳,۴۵^\circ)}{۶۰} = \mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۰,\ ۰۳,۴۵^\circ)$$

به عبارت دیگر:

$$\mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۰,\ ۰۳,۴۵^\circ) = \frac{\mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۳,۴۵^\circ)}{۶۰} = \frac{۰;۰۳,۵۵,۳۷,۰۹,۵۰,\ldots}{۶۰} = ۰;\ ۰۰,\ ۰۳,۵۵,۳۷,۰۹,\ ۵۰\ldots$$

اکنون با جیب‌های دو کمان، یعنی $\mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۰,\ ۰۳,۴۵^\circ)$ و $\mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۰,\ ۵۶,۱۵^\circ)$، می‌توان جیب $۰;۰۱^\circ$ را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۱^\circ) &= \mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰,\ ۵۶,۱۵^\circ + ۰;\ ۰۳,۴۵^\circ) \\
&\approx \mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰,\ ۵۶,۱۵^\circ) + \mathrm{Sin}\,(۰;\ ۰۳,۴۵^\circ) \\
&= ۰;\ ۰۰,۵۸,۵۴,۱۷,۳۰,\ \ldots + ۰;۰۳,۵۵,۳۷,۰۹,۵۰,\ldots \\
&= ۰;۰۱,۰۲,۴۹,۵۴,۳۹,\ldots \\
&\approx ۰;۰۱,۰۲,۴۹,۵۵
\end{aligned}$$

حاصل نهایی با دقت چهار رقم شصتگانی دقیقاً مقدار داده شده به ازای $۰;۰۱^\circ$ در جدول است. این نتیجه همچنین با این فرض است که وقتی کمان بسیار کوچک است، مقادیر جیب تمام (کسینوس) در دستورهای جیب مجموع دو کمان برابر با یک است، پس جیب مجموع دو کمان به سادگی از مجموع جیب‌های آن دو کمان به دست می‌آید.

نظر پایانی

روایت نیتیاننداا از استخراج جیب ۱° هچند دلیل شگفت‌انگیز است. او افزون بر آن‌که شیوه‌های فنی را استادانه به نظم درآورد، در مورد مفاهیم نو مرتبط با هندسهٔ دوایر که پایهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم هستند به سانسکریت مطالبی نوشت و ارتباط بسیار نزدیک بین تحلیل‌های هندسی و جبری مسئله برقرار کرد. به راستی هنوز محل پرسش است که چرا او به این حوزه علاقمند شده است و موضوع چگونه به کاشانی و الغ بیگ پیوند دارد. واضح است که او شرحی مملو از روش‌های گوناگون به همراه اثبات قوانین نوشته است. نحوهٔ انجام هر الگوریتم را با استخراج اصول هندسی و صحت جبری به دقت در مشتی ابیات در هم آمیخت. یک مورد خاص، مثالی حل شده با جزئیات است که آورد تا معادلهٔ درجهٔ سوم را به دست آورد. این بند منثور با سبکی شبه نمادین از استدلال درمیان شروح نوشته شده در تاریخ ریاضیات هندی تا زمان او بی‌سابقه بوده است.