بسم الله الرحمن الرحیم

شمارۀ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

میراث علمی اسلام و ایران

دوفصلنامۀ تاریخ علوم و فناوری دورۀ اسلامی
سال دهم، شماره‌های اول و دوم، سال ۱۴۰۰
شمارۀ پیاپی: ۱۹ و ۲۰

تصویر پشت جلد: زنده‌یاد حمیدرضا گیاهی یزدی در کنار شاخص ظهر مسجد میرزا داود همدان، ۱۳۸۲

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارۀ ۱۱۸۲، طبقۀ چهارم، شمارۀ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹–۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۶۰،۰۰۰ تومان

فهرست

مجموعهٔ مسائل کتاب جبر خوارزمی[۱]

جفری ا. اوکس[۲]
ترجمهٔ نرگس عصارزادگان[۳]

ویژگی‌های شفاهی و کتبی مطالعات سده‌های میانه

جنبه‌ای از کتاب جبر خوارزمی که برای خوانندهٔ امروزی برجسته است، این است که چارچوب متفاوتی از تولید و انتقال دانش در زمان خود عرضه می‌کند. در این کتاب و آثار دیگر جبردان‌های معروف دورهٔ اسلامی، هیچ نمادگذاری حتی برای نمایش اعداد وجود ندارد. انتظار می‌رود کسی که رساله‌ای دربارهٔ اعداد هندی نوشته است، دست کم در کتاب جبر خود از آنها استفاده کند!

دلیل نبود نمادگذاری، به ماهیت اساساً شفاهی تمدن اسلامی در سده‌های میانه (و نیز تمدن اروپای سده‌های میانه) مربوط می‌شود. [در آن دوره] هنوز دانش به طور شفاهی نقل می‌شد و عرضهٔ مطالب از حفظ، در فراگیری مهم بود. مؤلفان، کتاب‌های خود را در جلسات عمومی که مطالب از حفظ عرضه می‌شد، «انتشار می‌دادند»، و آثار مکتوب ضمن اهداف دیگر، ابزاری برای یادآوری از حافظه و از بر خوانی بود. تأکید روی کلام گفتاری، نشان می‌دهد که چرا کتاب‌های عربی سده‌های میانه، مثل سخنرانی‌ها خوانده می‌شوند. هنگام بلند خواندن، نمادگذاری فایده‌ای ندارد، پس بخشی از متن نیست.

امروزه در کشورهای غربی، آموزش بر نهادها، دوره‌ها و درجات تحصیلی تمرکز دارد. اما در دورهٔ اسلامی، آموزش بر دانشمندان به طور فردی، متون خاص، و مجوزها تمرکز داشت. به شاگرد آموزش داده می‌شد متنی را بلند از بر بخواند، «چون آنچه گوش می‌شنود در قلب استوار می‌شود».[۴] سپس شاگرد باید متن را نزد شیخ[۵] از بر می‌خواند، و شیخ هر از گاهی سؤالاتی دربارهٔ معنای آن بخش متن از او می‌پرسید. شاگردانِ موفق از شیخ مجوز (اجازه) دریافت می‌کردند و شیخ به آنها

۱. این نوشته ترجمهٔ مقالهٔ The series of problems in al-Khwārizmī's Algebra است.

۲. Jeffrey Oaks استاد ریاضیات دانشگاه ایندیاناپلیس، oaks@unidy.edu

۳. پژوهشگر تاریخ علم دورهٔ اسلامی، narges.assarzadegan@gmail.com

۴. ابو هلال حسن عسکری (د پس از ۴۰۰ق).

۵. معلم، ملا -م

اختیار بر متن می‌داد. سپس، این شاگردان، اجازهٔ تدریس متن را به شاگردان خود پیدا می‌کردند. بـه این ترتیب هر شیخ بخشی از زنجیرهٔ انتقال متن بود که نهایتاً به خود مؤلف باز می‌گشت.

از نظر دانشوران دورهٔ اسلامی، کتاب بـه درسـتی در حافظـه تثبیـت می‌شـد، و حافظـهٔ شـیخ از کلمات مکتوب روی کاغذ قابل اعتمادتر تلقی می‌شد. آثار مکتوب در فرهنگ شفاهی نقش داشتند و قرار نبود جایگزین آن شوند. بی‌شک شاگردان، آثار پیشرفته‌تر را حفـظ نمی‌کردنـد، بلکـه آن آثـار میان دانشوران به شیوه‌ای که با آن آشناتریم پخش می‌شد. اما روش سنتی نوشـتن بـه سـبک بلاغـی[1] حتی برای این کتاب‌ها نیز حفظ می‌شد.

کتاب‌های حساب و جبر نشانه‌هایی از ایـن یـادگیری شـفاهی دارنـد. مسـائل بـا عبـارت «اگـر شخصی به تو بگوید» شروع می‌شوند و اغلب در راه‌حل یک بار گفته شده است که مقـداری میـانی را «محفوظ بدار». مؤلفان دربارهٔ جبر و حسـاب شـعرهایی سـروده‌اند کـه آسـان بـه خـاطر سـپرده می‌شود، مشهورترین آنها ارجوزهٔ یاسمینیهٔ ابن یاسمینی[2] (؟- ح ۶۰۱) دربارهٔ جبر است.

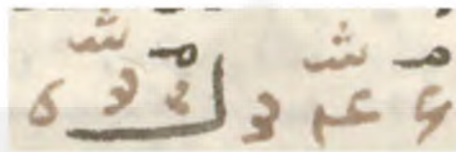
کتـاب تنهـا رسـانهٔ مکتـوب نبـود. بیشـتر کتاب‌هـای حسـاب عربـی، از جملـه کتـاب خـوارزمی، الگوریتم‌هایی برای نوشتن محاسبات روی سطوح قابل پاک شدن دارند.[3] یک سطح معمول برای نوشـتن تخت (لوح غبار) بود. تخت صفحه‌ای مسطح پوشیده با شن نرم یا غبار است که شکل‌ها با میلـه‌ای روی آن ترسیم می‌شوند. سطح دیگر لوحه (صفحه) بود که سطح آن گل رس نرم قابـل پـاک کـردن و اسـتفادهٔ مجدد به طور نامحدود است. چون پاک کردن آسان است، پاسخ هر مسـئلهٔ حسـابی را می‌تـوان بـا پـاک کردن، نوشتن روی ارقام قبلی، و با جابجایی اعداد حل کرد. هر دوی این رسانه‌ها به تختـه سـیاه و وایـت بورد امروزی شبیه و برای حل مسائل مطلوبند، اما برای ثبت دائمی متن مناسب نیستند.

متن کتاب‌های حساب نیز مثل کتاب‌های جبر، شامل دستورهای شفاهی برای چگونگی انجـام عملیاتند. در آنها اعداد در قالب کلمات، و اعداد واقعی تنها به عنوان تصاویری برای توضیح، بیشتر شبیه به نمودارهای هندسی نوشته می‌شود. برای مثال، حصّار[4] (ح سدهٔ ۶هـ)، مسئله‌ای را بـا جملـهٔ «اگر جذر پانصد و هشتاد و سه هزار و ششصد و نود و شش را می‌خواهی، آن را روی یـک خـط بـه صورت ۵۸۳۶۹۶ بنویس»[5] آغاز می‌کند. در ادامهٔ متن، وقتی حصّار مسائل را با جبـر و روش‌هـای

۱. بلاغت روشی برای استفادهٔ مؤثر و متقاعدکننده از زبان در قالب گفتاری یا نوشتاری است. این یک هنر گفتمانی است که روش‌های مختلفی را برای متقاعد کردن، تأثیرگذاری یا خشنود کردن مخاطب به کار می‌گیرد. -م
۲. ابن یاسمینی یا ابن یاسمین دانشمند مسلمان بربری نسب مراکشی است. -م
۳. استثنای قابل ذکر، اقلیدسی (سدهٔ چهارم هجری) است، که قلم و کاغذ را مطرح کرد.
۴. حَصّار، محمد بن عبدالله بن عیاش، ریاضی‌دان مغربی، که احتمالاً در سدهٔ پنجم و ششم هجری می‌زیست. -م
۵. حصّار، برگ ۲۳پ.
تعداد کمی از کتاب‌ها در متن رقم دارند، مثل الفصول فی الحساب الهندی اقلیدسی.

دیگر حل می‌کند، هیچ نمادی به کار نمی‌برد. فرض بر این است که شاگرد می‌داند چگونه محاسبات را با نمادگذاری انجام دهد، بنابراین فقط شکل گفتاری عرضه می‌شود.

نمادگذاری خاصی برای جبر در سدهٔ ششم هجری در مراکش ابداع شد. اولین حرف نام توان، روی عدد آن (یعنی ضریب آن) گذاشته می‌شد، و یک حرف لام کشیده، به صورت لـــ، نشانهٔ مساوی بود.[1] مثالی از نسخهٔ بغیة الطلاب فی شرح منیة الحُسّاب ابن غازی[2] در زیر می‌آید: از چپ به راست نوشته‌ام، m را برای مال ($x^{۲}$)، و t را برای شئ (x) به کار برده‌ام:



مال شئ عدد   مال شئ عدد

۶ ۴ ۳ = ۲ ۳ ۵

$$۶x^{۲} + ۴x + ۳ = ۲x^{۲} + ۳x + ۵$$

تنها در چند کتاب کاربردی از این نمادگذاری استفاده شده است. همهٔ این آثار در مراکش و احتمالاً اندلس، پس از اواخر سدهٔ ششم هجری نوشته شده‌اند.[3] هیچ یک از کتاب‌ها را ریاضی‌دانان مشهورتری چون محمد بن موسی خوارزمی، ابوکامل شجاع بن اسلم، حاسب کرجی، سموأل مغربی، عمر خیام، و شرف‌الدّین طوسی ننوشته‌اند. در این کتاب‌ها گه‌گاه شکل‌هایی به همان شیوهٔ حساب هندی، برای نشان دادن چگونگی نوشتن روی تخت و تراب طی محاسبات عرضه شده است.

حال این پرسش مطرح می‌شود که ریاضی‌دانان سدهٔ سوم هجری مسائل را چگونه از طریق جبر حل می‌کردند؟ شواهدی در دست است که در نسخه‌های خطیِ بعدی، محاسبات جبری نظیر نمادگذاری غرب جهان اسلام، اما بدون حروف ابتداییِ اسامیِ توان‌ها انجام می‌شد.

در بیشتر آثار ریاضی دورهٔ اسلامی، تنها ضرایب جملات نوشته شده‌اند، مثل آن‌چه در نمادگذاری حاشیهٔ همان نسخه از ابن غازی دیده می‌شود. اینجا نمادگذاری‌ها به دو صورت آمده است؛ تصویر متن، که با نمادگذاری غربی و صورت‌های غربی ارقام نوشته می‌شود:

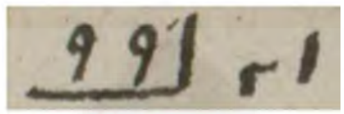
۱. لام کشیده خلاصهٔ «یعادل» به معنای مساوی است. -م

۲. ابن غازی، برگ ۸۳ر (ص ۱۶۵ اسکن).
ابن غازی مکناسی (۸۴۱-۹۱۹ق) دانشمند مراکشی که به ریاضیات نیز می پرداخت. -م
کتاب در حدود ۱۵۰۰م/۹۰۰ق تألیف شده، اما نسخه بی‌تاریخ است.

۳. این نمادگذاری در حدود سدهٔ دوازدهم هجری توسط دانشمندان عثمانی احیا شد، اما در اینجا کاری به آن نداریم.

م ش
۹۹ ـــ ۲ ۱ $x^{۲}+۲x=۹۹$

شخص دیگری در حاشیه، صورت‌های شرقی ارقام را، بدون حروف ابتدایی نام توان‌ها بازنوشته است:[۱]



.

این نسخهٔ کتاب ابن غازی نمونه‌ای متأخر است، ولی از اوایل سدهٔ پنجم هجری نیز شواهدی داریم. در کتاب بدیع فی الحساب کرجی چندجمله‌ای‌ها به صورت فهرستی از ضرایب نشان داده می‌شوند. مثلاً کرجی چند جمله‌ای $۱+۲x+۳x^{۲}+۴x^{۳}+۵x^{۴}+۶x^{۵}+۷x^{۶}$ را چنین می‌نویسد: «۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷». از راست چنین شرح می‌دهد: «اولی عدد، دومی جذر، سومی مال و چهارمی مکعب است، و به همین ترتیب ادامه می‌یابد».[۲] در کتاب الباهر فی علم الحساب سموأل (؟- ح ۵۷۰ق) دربارهٔ جبر و مقابله و در مفتاح الحساب کاشانی (؟-۸۳۲ق) نیز همین صورت به کار رفته است. بدون نمادگذاری خاص برای توان‌ها، محاسبات تنها با اعداد هندی انجام شده است. درست مثل حصّار که چون از قبل به محاسبات حسابی پرداخته است، هیچ‌گونه نمادگذاری در حل مسائل از طریق جبر عرضه نمی‌کند، کتاب‌های بیشتر جبردان‌ها نیز این‌گونه است.

حساب انگشتی روش دیگر حساب رایج در خاورمیانهٔ باستان است، که به معاملات (حساب بازرگانی) مربوط است. در این روش محاسبات به صورت ذهنی انجام می‌شود و نتایج محاسبات میانی با موقعیت انگشتان به روش‌های خاصی «ذخیره می‌شود». ابوالوفا بوزجانی (۳۲۸-۳۸۸ق) نخستین رسالهٔ شناخته شده دربارهٔ حساب انگشتی[۳] را در سدهٔ چهارم هجری نوشت، و سعیدان می‌نویسد که جبر از دل این سنت توسعه یافت.[۴] بعداً (حداکثر تا زمان کرجی) جبر با حساب هندی تلفیق شد.[۵] حتی شاید خوارزمی حساب هندی را روی تخت یاد گرفته باشد، اما محاسبات جبری خود را به طور ذهنی انجام می‌داد.

---

۱. ابن غازی، برگ ۱۰۸ر (ص ۲۱۵ اسکن).
۲. کرجی، ۱۹۶۴، ص ۵۳.
۳. منظور کتاب مایحتاج الیه الکتاب و العمال من علم الحساب است. احمد سلیم سعیدان این کتاب را با مقدمه‌ای مفصل در ۱۹۷۱ در تاریخ علم الحساب العربی منتشر کرده است. -م
۴. سعیدان ۱۹۷۴، ۳۶۹.
۵. رشدی راشد این تلفیق را «حسابی شدن جبر» نامیده است. -م

محاسبات جبری در چند دهه بعد از خوارزمی دشوارتر می‌شود. در راه حل جبری مسئلهٔ (۵۵) کتاب ابوکامل[۱]، مربع $15+\sqrt{1176}+\sqrt{216}$ یعنی $1617+\sqrt{1058400}+\sqrt{1016064}+\sqrt{194400}$ کلاً به صورت کلمات، و بدون محاسبات میانی بیان شده است.[۲] از چنین مسائلی در می‌یابیم که جبردان‌ها مسائل را با نوشتن راه حل لفظی حل نمی‌کردند. اگرچه این امر برای مسائل ساده در کتاب خوارزمی ممکن است، دشواری محاسبات در کتاب‌های دیگر نشان می‌دهد پیش از نوشتن پاسخ به صورت لفظی محاسبه انجام شده بود.

پس برای حل مسئله از طریق جبر در زمان خوارزمی باید محاسبات توسط حساب انگشتی یا با نمادگذاری هندی روی برخی سطوح ناپایدار مثل لوح غبار انجام می‌شد. برای بیان نتیجه، باید صورتی (مکتوب یا شفاهی) از مراحل تدوین می‌شد. امروزه این تمایز بین راه‌حل و بیان نتیجه وجود ندارد، چون از همان نمادگذاری که برای حل مسئله روی تختهٔ سیاه استفاده می‌کنیم، برای نشان دادن آن در کتاب نیزاستفاده می‌کنیم. به یاد داشته باشید که تمایز دقیقی بین شیوه‌های ارتباط شفاهی و کتبی در ریاضیات دورهٔ اسلامی وجود نداشت. متخصصانی که در سنت شفاهی کار می‌کردند روی تخت یا لوح می‌نوشتند، و دست‌اندرکاران فرهنگ «مکتوب» کتاب‌هایی تولید می‌کردند که در حکم سخنرانی بود.

ساختار نخستین کتاب‌های جبر دورهٔ اسلامی

کتاب‌های جبر خوارزمی، ابوکامل، کرجی، علی سُلّمی، ابن بنّا و چند ریاضی‌دان دیگر ساختار کلی مشترکی دارند. بخش اول کتاب به قوانین جبر اختصاص دارد، که با مجموعه‌ای از مسائل حل شده ادامه می‌یابد. در کتاب‌های خوارزمی و ابوکامل در پی این «جبر محض» فصول طولانی دربارهٔ موضوعات مربوط به جبر می‌آید.

محتوای کتاب جبر خوارزمی، اوایل سدهٔ سوم هجری[۳]

[تعاریف] درهم [عدد]، شئ [x]، مال [x^2] (گ ۲ر)

معادلات ششگانه با مثال و حل (۲ر- ۳پ)

برهان معادلات [مفردات، مقترنات] (۳پ- ۵ر)

ضرب دوجمله‌ای‌ها (۵ر-۶پ)

---

۱. الشامل (الکامل) فی الجبر والمقابلة -م

۲. حتی مسائل با محاسباتی پیچیده‌تر در این کتاب وجود دارد (مسائل ۵۶ و ۵۸). کاتب نسخه در مسئلهٔ ۵۶ در حاشیهٔ پایین صفحه (نه متن) یکی از اعداد را با نماد هندی نوشته است، احتمالاً به این دلیل است که بتوان عدد را به درستی در قالب کلمات نوشت. با این حال یک خط از متن خط خورده است.

۳. شمارهٔ برگ‌ها مطابق با نسخهٔ آکسفورد در نوشته شده‌است.

جمع و تفریق چندجمله‌ای‌های ناقص (۶پ)

اعمال با جذرها (۶پ-۷ر)

اثبات‌هایی برای تفریق چندجمله‌ای‌های ناقص (۷ر-۸ر)

۳۹ مسئلهٔ حل شده (۸ر-۱۴ر)

... در ادامه فصل‌هایی دربارهٔ تناسب[1]، مسّاحی، و مسائل وصایا (۱۴ر-۳۴ر).

محتوای کتاب *جبر و مقابلهٔ* ابوکامل، اواخر سدهٔ سوم هجری[2]

اسامی توان‌ها (ص ۴)

معادلات ششگانه با مثال‌ها، راه حل‌ها، و برهان‌ها (۵-۲۳)

ضرب یک جمله‌ای‌ها و دوجمله‌ای‌ها (۲۳-۳۳)

اعمال با جذرها (۳۳-۴۲)

۷۴ مسئلهٔ حل شده (۴۲-۱۳۳)

... و در ادامه فصل‌هایی دربارهٔ کاربردهای جبر در هندسه و معادلات سیاله، و مسائلی از سرگرمی‌های ریاضی.

محتوای کتاب *الفخری فی الجبر والمقابلهٔ* کرجی دربارهٔ صناعت جبر، اوایل سدهٔ پنجم[3]

اسامی توان‌ها (ص ۹۸-۱۰۱)

ضرب، تقسیم و نسبت‌های یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها (۱۰۱-۱۱۶)

جذر یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها (۱۱۶-۱۱۷)

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها (۱۱۸-۱۲۱)

حساب جذرها و توان‌ها (۱۲۱-۱۳۱)

جمع اعداد متوالی (۱۳۲-۱۴۱)

قضایایی در حساب (۱۴۱-۱۴۵)

معادلات ششگانه، با برهان (۱۴۵-۱۶۵)

آشنایی با معادلات سیاله (۱۶۵-۱۶۹)

۲۵۵ مسئلهٔ حل شده (۱۷۰-۳۰۸)

---

۱. در کتاب‌های جبر دورهٔ اسلامی در بخش معاملات (خرید و فروش و صرف و اجاره و ...) چهار مقدار متناسب مُسَعَّر، سِعر، ثَمَن و مثمن داریم. از این اعداد همیشه سه عدد معلوم و یکی مجهول است. -م

۲. شمارهٔ صفحه‌ها از چاپ عکسی در [ابوکامل ۱۹۸۶] گرفته شده‌است.

۳. شمارهٔ صفحات از [سعیدان ۱۹۸۶] گرفته شده است.

محتوای کتاب *مقدمةٍ کافیةٍ فی حساب الجبر والمقابلة و مایعرف به قیاسه من الامثله* اثر علی سُلّمی[1] **سدهٔ چهارم و پنجم هجری**[2]

تعریف مقابله، جبر، تعریف اسامی توان‌ها و دسته‌بندی معادلات ششگانه (گ۲پ-۵ر)
توضیح قواعد حل معادلات ششگانه (بدون برهان) (گ ۵ر-۸پ)
اسامی توان‌های بالاتر، تعیین درجهٔ یک جمله (۸پ-۱۴پ)
ضرب جذرهای اعداد؛ ضرب توان‌های مجهول (۱۴پ-۱۹ر)
تقسیم توان‌ها، تقسیم جذرها، ضرب توان‌ها در جذرهای اعداد (۱۹ر-۲۳پ)
ضرب دوجمله‌ای‌ها، هم در جذرها و هم در توان‌ها (۲۳پ-۲۷پ)
افزودن و کاستن جذرهای اعداد (۲۷پ-۳۵پ)
جمع چندجمله‌ای‌ها با جملات ناقص توسط بازیابی (۳۵پ-۳۸ر)
۷۴ مسئلهٔ حل شده (۳۸ر-۸۶ر)
... و در ادامه معادلات درجهٔ بالاتر، شامل دسته‌بندی همهٔ معادلات درجهٔ سوم و معادلات دوجمله‌ایِ درجهٔ چهارم، با بحث (۸۶ر-۹۸ر).

محتوای کتاب *تلخیص أعمال الحساب*[3] ابن بنّای مراکشی، اواخر سدهٔ هفتم هجری[4]

مقدمه‌ای طولانی دربارهٔ حساب با تمرکز بر جذرها (ص۵۰۶-۵۳۳)
اسامی توان‌ها (۵۳۳-۵۳۵)
ضرب یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها، شامل جذر جملات (۵۳۵-۵۳۸)
تقسیم همان‌ها (۵۳۸-۵۴۱)
معادلات (۵۴۲-۵۴۷)
راه حل‌ها و برهان‌های حسابی برای معادلات مرکب [مقترنات] (۵۴۷-۵۵۵)
۴۲ مسئلهٔ حل شده (۵۵۶-۵۸۵).

توضیحاتی دربارهٔ محتوای رسالهٔ خوارزمی

توان‌های مجهول در جبر دورهٔ اسلامی اسامی خاصی دارند. جذر یا شیئ برای توان اول [x]، مال برای توان دوم [x^2]، و واحدها [اعداد] معمولاً به صورت درهم، که یک نوع سکهٔ نقره است به کار

۱. ابی الحسن علی سُلّمی (قرن ۶هـ) بعد از خیام، در کتاب خود دو نوع معادلهٔ درجهٔ سوم را در حالت خاص حل کرده و پاسخ آنها را به کمک رادیکال‌ها به دست آورده است (معصومی همدانی، مقالهٔ «جبر»، دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۷، ۱۳۹۳، ص ۵۸۸). -م
2. MS Vatican, Sbath 5
۳. جزء ثانی قسم ثانی این کتاب، عنوان فی الجبر والمقابلة دارد. -م
۴. شمارهٔ صفحات از [سعیدان ۱۹۸۶] گرفته شده است.

می‌روند. کلمهٔ مال [اصلاً] به معنای پول، سرمایه، یا دارایی است.کلمات مال و جذر در بعضی مسائل به معنای غیرجبری نیز به کار می‌رفتند. مال به معنای پول یا کمیتی عمومی، و جذر به معنای عادی «ریشهٔ دوم» به کار می رود. خوارزمی از معادلات درجهٔ دوم فراتر نمی‌رود، اما نویسندگان بعدی توان‌های بالاتر و حتی معکوس آنها را به کار می‌بردند. توان سوم، کعب نامیده می‌شود و توان‌های بالاتر به صورت ترکیب واژه‌های مال و کعب نامگذاری می‌شوند.[1]

یک نمونهٔ معادله از کتاب خوارزمی چنین است: «چهار تُسع مال و نه درهم منهای چهار جذر معادل یک جذر است» ($\frac{4}{9}x^2+9-4x=x$). معادلات چندجمله‌ای درجهٔ یک یا دو به یکی از انواع ششگانهٔ زیر تبدیل می‌شوند:

– معادلات ساده [مفردات]

نوع ۱: مال‌هایی معادل جذرها (با علائم جدید، $ax^2=bx$)

نوع ۲: مال‌هایی معادل اعداد ($ax^2=c$)

نوع ۳: جذرهایی معادل اعداد ($bx=c$)

– معادلات مرکب [مقترنات]

نوع ۴: مال‌ها و جذرهایی معادل اعداد ($ax^2+bx=c$)

نوع ۵: مال‌ها و اعدادی معادل جذرها ($ax^2+c=bx$)

نوع ۶: مال‌هایی معادل جذرها و اعداد ($ax^2=bx+c$)

خوارزمی راه حل‌هایی برای معادلات نمونه از انواع ششگانه با ضرایب عددی عرضه می‌کند. در برهان‌های قواعد حل معادلات مقترنه، «شئ» به عنوان پاره‌خط و مال به عنوان مربع روی این روی خط نمایش داده می‌شود.

سپس خوارزمی توضیح می‌دهد چگونه عملیاتی مثل $10\cdot(10-x)$ و $(10+\frac{1}{2}x)(\frac{1}{2}-5x)$، روی جملات جبری انجام می‌شود، که متناظر با مثال‌های حسابی چون $(10+2)\cdot(10+1)$ و $(1-\frac{1}{6})\cdot(1-\frac{1}{6})$ است. او به طور جداگانه جمع و تفریق چندجمله‌ای‌های ناقص (آنهایی که علامت «–» دارند) را به دلیل مفهوم متفاوتشان از چندجمله‌ای‌ها بیان کرده است. اینجا خوارزمی دو برهان هندسی برای محاسبات خاص عرضه می‌کند، و شرح می‌دهد که در این باره کوشیده اما برای

۱. برای مثال، مال کعب یعنی x^5 –م

عرضهٔ برهانی مشابه برای محاسبه‌ای دیگر شکست خورده است. قواعد و مثال‌های او برای عملیات روی جذرها، حسابیِ محض است اما آن‌ها را می‌آورد زیرا برای جملات جبری هم صادقند.

دومین بخش «جبر محض» شامل ۳۹ مسئلهٔ حل شده است. سه مرحلهٔ اساسی برای حل مسئله در جبر مشخص کرده‌ام:

مرحلهٔ ۱: مجهول (معمولاً شئ) نامیده می‌شود، و عملیات یا شرایط صورت مسئله برای تنظیم معادله انجام می شود،

مرحلهٔ ۲: معادله به یکی از شش نوع ساده می‌شود، و

مرحلهٔ ۳: عملیات بیان‌شده برای رسیدن به جواب انجام می‌شود.

در اینجا به مسئله‌ای از خوارزمی (T۶) که به سه مرحله تجزیه شده‌است، می‌پردازیم:

- صورت مسئله

مسئلهٔ ششم. مالی (یعنی «کمیتی») داریم: اگر یک سوم آن را در یک چهارم آن ضرب کنیم، آنگاه با آن مال به علاوهٔ ۲۴ درهم برابر می‌شود.[۱]

- مرحلهٔ ۱

راه‌حل این است که مال (کمیت) را یک شئ فرض می‌کنی. آنگاه یک سوم شئ را در یک چهارم شئ ضرب می‌کنی. پس نصفِ سُدسِ مال (مجذور شئ)، برابر است با یک شئ به اضافهٔ بیست و چهار.

- مرحلهٔ ۲

سپس برای تکمیل مال، نصفِ سُدسِ مال را در دوازده ضرب کن تا آن مال کامل شود، و شئ و بیست و چهار را نیز در دوازده ضرب کن. پس دویست و هشتاد و هشت درهم به اضافهٔ دوازده جذر، معادل یک مال می‌شود.

- مرحلهٔ ۳

سپس جذرها را نصف کن، و آن را در خودش ضرب کن و به دویست و هشتاد و هشت بیفزای. آنگاه جمع اینها برابر سیصد و بیست و چهار می‌شود. جذر آن را بگیر، هجده می‌شود. سپس نصف تعداد جذرها را به آن بیفزای. پس مجموع آن بیست و چهار می‌شود.

زبان راه حل مسائل حل شده

اکنون دو ویژگی از مسائل خوارزمی را بیان می‌کنم که نشان می‌دهد او بیشتر آن‌ها را از منبع دیگری

---

۱. $\frac{۱}{۳}x \cdot \frac{۱}{۴}x = x + ۲۴ \Rightarrow x^۲ = ۱۲x + ۲۸۸$.-م.

گرفته و در بازنگریِ دست کم شش مورد اول نقش داشته است. نخست اینکه، چند مسئله از کتاب خوارزمی نه با جبر بلکه با روشی که آن را «استدلال حسابی» نامیده‌ام حل می‌شوند. دوم، برخلاف جبردان‌های بعدی، خوارزمی اغلب راه‌حل‌های جبری خود را با جمله‌ای امری، چون «آنگاه یکی از قسمت‌ها را شئ فرض کن» شروع می‌کند. اما معمولاً یکراست به سراغ زبان جبر می‌رود.

استدلال حسابی

همهٔ مسائل کتاب خوارزمی با جبر حل نمی‌شود. مسائل (۱۱) تا (۱۶)، (۲۹) تا (۳۲)، و (۳۴) به صورت لفظی از طریق محاسبه حل می‌شود. من این روش را «استدلال حسابی» نامیدم. هیچ مجهولی نامگذاری نشده، و هیچ معادله‌ای تنظیم نشده است. برخی مؤلفان بعدی چون ابوکامل، کرجی، ابن بنّا و کمال الدین فارسی (ح ۶۶۵-۷۱۸ق) حل مسائلی را به این روش عرضه کرده‌اند. در زیر، مسئلهٔ ۱۴ ابوکامل را که به دو روش متفاوت حل شده است می‌آوریم. او راه‌حلی از طریق استدلال حسابی عرضه می‌کند و در حاشیهٔ نسخه راه‌حلی جبری وجود دارد، که منسوب به فردی به نام ابو یوسف[1] است:

پس اگر شخصی گوید، مالی (کمیتی) دارد، یک سوم آن را از آن کم کن. سپس آنچه باقی می‌ماند را در سه جذر مال ضرب کن، پس اصل مال به‌دست می‌آید.

می‌دانی که اگر از مال یک سوم آن را کم کنی، دو سوم آن باقی می‌ماند، و اگر این دو سوم را در یک درهم و نصف درهم ضرب کنی، اصل مال برمی‌گردد. پس درهم به اضافهٔ نصف برابر سه جذر مال است. پس جذر مال،[2] نصف و مال،[3] یک چهارم است.

ابو یوسف می‌گوید: اگر بخواهی، به روشی دیگر این مسئله را حل کنی، مال را شئ فرض کن. پس یک سوم آن را از آن کم کن، آنگاه دو سوم شئ باقی می‌ماند. پس آن را در سه جذر شئ، که جذر نُه مال است ضرب کن. پس جذر چهار کعب، معادل شئ می‌شود. [پس شئ] را در خودش ضرب کن، یک مال می‌شود. و جذر چهار کعب را در خودش ضرب کن، پس چهار کعب با یک مال برابر می‌شود. پس هر آنچه با تو است به مال تقسیم کن. نتیجه این است: چهار شئ معادل یک درهم است. پس شئ معادل یک چهارم درهم است.

توجه داشته باشید که در راه نخست، انتقال به زبان جبری جایی ندارد. راه دوم، روش جبری را

---

۱. شاید منظور ابویوسف کِنْدی (۱۸۵-۲۵۶ق) مکنّیٰ به ابوالحکماء مترجم، ریاضی‌دان، منجم، موسیقی‌دان و فیلسوف عرب و عضو دارالحکمه باشد. وی با نوشتن کتاب فی استعمال اعداد الهندی در ۲۰۹ هجری قمری نقش بزرگی در انتقال اعداد هندی به تمدن اسلامی و سپس به اروپا داشت. -م

۲. مال = سرمایه -م

۳. مال= توان دوم x -م

دنبال می‌کند. اینجا مقدار مجهولی وجود دارد (مال) که شئ نامیده می‌شود، و با انجام عملیاتی معادلهٔ ($\sqrt{۴x^{۳}} = x$) تنظیم و سپس حل می‌شود.

این مسئله را با مسئلهٔ (۳۱) خوارزمی مقایسه کنید، که آن هم به روش استدلال حسابی حل شده است:

اگر شخصی گوید مالی (کمیتی) است که چون یک سوم آن را کم کنی و باقیمانده را در سه جذر اصل مال ضرب کنی، آنگاه اصل مال به‌دست می‌آید.

قاعده چنین است که اگر کل اصل مال را، پیش از کسر یک سوم آن، در سه جذر خودش ضرب کنی، مال و نصفی می‌شود، زیرا دو سوم آن در سه جذر خودش مساوی یک مال است. پس کل آن ضرب در سه جذر آن مساوی مال و نصف مال است، پس کل آن در یک جذر، مساوی نصف مال است. پس جذر مال، برابر نصف، و اصل مال برابر یک چهارم است. بنابراین دو سوم مال، یک ششم است، و سه جذر مال درهمی و نصف درهم است. پس وقتی سدس را در یک درهم و نصف درهم ضرب کنی، یک چهارم حاصل می‌شود، و آن مقدار مال است.

اگر فرض کنیم خوارزمی همهٔ مسائل را خود در کتاب جبرش نوشته است، این سؤال پیش می‌آید که چرا برخی مسائل را با روش متفاوتی حل کرده است. از دیگر سو، اگر فرض کنیم او مسائل (۱) تا (۳۴) را برای برخی متخصصان نوشته است، آنگاه وجود این راه حل‌های غیر جبری معنا پیدا می‌کند. از کتاب‌های بعدی می‌دانیم که مسائل حسابی با روش‌های گوناگونی حل می‌شوند، پس مجموعه‌ای از مسائل شفاهی، با وجود تمرکز روی جبر، احتمالاً چند مسئلهٔ حل شده با روش‌های متفاوت هم دارند. این روش‌ها کم و بیش با هم مرتبطند، پس عجیب نیست که هر دو روش با هم در کتاب خوارزمی یافت می‌شود.

انواع مسائل حل شده با استدلال حسابی، بسیار شبیه یکدیگرند. بیان جبری امروزی این مسائل از کتاب‌های گوناگون در زیر می‌آید. M را به جای کمیت مجهول مال (مقدار)، و $\rightarrow$ را برای نتیجهٔ عملیات می‌نویسم.

خوارزمی

$$(۱۱)\ \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۵}M\right) = \frac{۱}{۷}\sqrt{M}$$

$$(۱۲)\ \frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{۵}M\right) = \frac{۴}{۵}\sqrt{M}$$

$$(۱۳)\ M \cdot (۴M) \rightarrow ۲۰$$

$$(۱۴)\ M \cdot \left(\frac{۱}{۳}M\right) \rightarrow ۱۰$$

(۱۵) $M\cdot(۴M)\to\frac{۱}{۳}M$

(۱۶) $M\cdot\sqrt{M}\to ۳M$

(۲۹) $M\cdot(\frac{۲}{۳}M)\to ۵$

(۳۰) $M\cdot ۳\sqrt{M}\to ۵M$

(۳۱) $(M-\frac{۱}{۳}M)\cdot ۳\sqrt{M}\to M$

(۳۲) $(M-۴\sqrt{M})\frac{۱}{۳}\to ۴\sqrt{M}$

(۳۴) $(M-۳\sqrt{M})^{۲}\to M$

ابوکامل

(۱۴) $(M-\frac{۱}{۳}M)\cdot ۳\sqrt{M}\to M$

(۱۵) $(M-\frac{۱}{۳}M)\cdot ۳\sqrt{M-\frac{۱}{۳}M}\to M$

(۱۶) $۳\sqrt{M}+۲\sqrt{M-۳\sqrt{M}}\to M$

(۱۷) $۳\sqrt{M}+۴\sqrt{M-۳\sqrt{M}}\to M+۴$

حاسب کرجی

(III.۲۲) $(M-\frac{۱}{۳}M)\cdot\sqrt{M}\to M$

ابن بنّای مراکشی

(III.۲) $(M-\frac{۱}{۳}M)\cdot ۳\sqrt{M}\to M$

کمال‌الدین فارسی

(۲۱) $M\cdot(\frac{۳}{۴}M)\to M$

دستورهای ضمنی

خوارزمی مجموعهٔ مسائل حل شدهٔ خود برای توضیح شش معادلهٔ ساده شده را با شش مسئله آغاز می‌کند. آنها را T۱ تا T۶ نامیده‌ام. در T۱ مسئله به معادلهٔ نوع ۱ تبدیل می‌شود، در T۲ مسئله به معادلهٔ نوع ۲ ساده می‌شود، و به همین ترتیب تا T۶. در ادامهٔ این شش نوع مسئله، ۳۳ مسئلهٔ دیگر وجود دارد که آنها را ۱ تا ۳۴ نامیده‌ام.

خوارزمی برخلاف جبردان‌های بعدی، تنها گاهی مجهول خود را با جمله‌ای مثل «یکـی از اجـزاء را شئ فرض کن» به صراحت نامگذاری می‌کند. ولی جبردان‌های دیگر معمولاً مجهـول را در ابتـدای حل نامگذاری می‌کنند. آغاز مسئلهٔ (۲۳) خوارزمی را با مسئلهٔ (۷۰) علی سُلّمی مقایسه کنید:

خوارزمی:

> اگر کسی گوید، مالی (کمیتی) است که چون یک سوم آن به اضافهٔ یک درهم آن را در یک چهارم به اضافهٔ دو درهم ضرب کنی، آن مـال بـه اضـافهٔ ۱۳ درهـم بـه دست می‌آید.[1] راه حل آن چنین است که یک سوم یک شئ را در یک چهارم شـئ ضرب می‌کنی ...

علی سلّمی:

> مالی داریم. کسی یک سوم آن به اضافهٔ یک درهم را در یک چهارم آن بـه اضـافهٔ دو درهم ضرب می‌کند، آنگاه یک مال به اضافهٔ ۱۳ درهم بـه‌دسـت مـی‌آیـد. راه حل آن چنین است که مال خود را شئ فرض می‌کنی. آنگاه یـک سـوم شـئ را در یک چهارم شئ ضرب می‌کنی ...

آنجا که علی سلمی با امر به اینکه «مال خود را شئ فرض می‌کنی» شـروع می‌کنـد، خـوارزمی مستقیماً به زبان جبر سخن می‌گوید.

خوارزمی دستور خـود را در T۱، T۲، T۳، T۵، و T۶ تصـریح می‌کنـد. اینجـا دسـتورهایی بـا استفاده از فعل «قرار دادن» (جَعَلَ) وجود دارد، درست نظیـر آنچـه کـه در کتاب‌هـای جبـر بعـدی می‌یابیم: یکی از اجزاء را شئ قرار بده» یا «مال خود را شئ قرار بـده». در مسـائل (۱)، (۵)، (۱۰)، (۲۴)، (۲۵) و (۲۸) مجهول با کلمات نامعمولی بیان شده است، مثل «شئ را از ده بر مـی‌داری»[2] در (۱۰) و «می‌گویی، [دارایی] آن مرد و مرد دیگری برابر است با یک به اضافهٔ شـئ»[3] در (۲۴). در باقی مسائل حل شده با جبر هیچ جملهٔ دستوری نمـی‌آورد: (T۴) ، (۲)- (۴)، (۶)- (۹)، (۱۷)- (۲۳)، (۲۶)، (۲۷)، و (۳۳).

---

۱. $(\frac{۱}{۳}x+۱)(\frac{۱}{۴}x+۲)=x+۱۳$ -م

۲. مسئلهٔ ۱۰ کتاب جبر خوارزمی: «اگر کسی بگوید: ده را به دو قسمت تقسیم کردم، سپس یکی را در دیگری ضرب کردم، آنگاه حاصل‌ضرب را بر تفاضل میان دو قسمت، پیش از آنکه یکی در دیگری ضرب شود، تقسیم کردم، خارج قسمت پنج و یک چهارم شد، راه‌حلش چنین است: شئ را از ده بر می‌داری، ده منهای شئ باقی می‌ماند. چون یکی از این دو را در دیگری ضرب کنی می‌شود ده جذر منهای مال، و این حاصل‌ضرب یکی از دو قسمت است در دیگری ...». -م

۳. مسئلهٔ ۲۴ کتاب جبر خوارزمی: «اگر کسی بگوید: یک درهم و نیم را بین مردی و مرد دیگری تقسیم کردند، سهم آن مرد به اندازهٔ دو برابر سهم آن دیگری شد، راه‌حلش چنین است: می‌گویی یک مرد و دیگری عبارت است از: یک به اضافهٔ شئ زیرا مانند آن است که گفته باشد یک درهم و نیم تقسیم بر یک به اضافهٔ شئ، پس سهم هر یک دو شئ شده است ...». -م

دستورهایی که با جَعَلَ شروع می‌شوند تنها در پنج تا از مسائل (T۱)- (T۶) دیده می‌شود، به این معنا که خوارزمی تصمیم آگاهانه برای نوشتن این دستورها داشته است. این مسائلِ نخستین، برای شرح راه‌حل‌های معادلات ششگانه مهمند، پس گویی او می‌خواسته تا حد امکان واضح باشند. نبودِ چنین جملاتی در مسائل بعدی نشان می‌دهد که خوارزمی آن مسائل را از سنت شفاهی گرفته است. اگر خودش آنها را نوشته بود، باید انتظار می‌داشتیم دست‌کم برخی از آن‌ها با یک دستور شروع شوند.

تلفیق

پس جبر چگونه پیش از نوشته شدن کتاب‌های خوارزمی، ابن ترک[۱] [ح نیمهٔ اول سدهٔ سوم هـ] و سند بن علی [منجم و ریاضی‌دان سدهٔ سوم هـ] در اوایل سدهٔ سوم هجری تدریس می‌شد؟ پیش از این، متخصصان با مجموعهٔ مسائلی نظیر مسائل کتاب خوارزمی کار می‌کردند. آن‌ها بی‌گمان اسامی توان‌ها [درهم، شئ، مال]، قوانین عملیات روی یک‌جمله‌ای‌ها و دوجمله‌ای‌ها، قوانین عملیات روی جذرها، و نیز راه حل سه معادلهٔ مقترنه را آموزش می‌دادند (راه‌حل معادلات ساده [مفردات] بدیهی‌اند، پس شاید نیازی به آموزش آن‌ها نبود). معلوم نیست آیا آن‌ها معادلات ششگانه را طبقه‌بندی کرده‌اند یا کار خوارزمی بوده است. هویروپ[۲] به خوبی ثابت کرده است که حداقل، اولین اثباتِ معادلهٔ نوع ۴ بخشی از جبر است، اما نمی‌دانیم آیا بخشی از تعلیم جبری پیش از خوارزمی است، یا آن را از تعالیم دیگر اهل فن[۳] گرفته است (نک: دنبالهٔ مقاله). گویا خوارزمی فکر نامگذاری رئوس شکل‌های رسالهٔ خود با حروف را از سنت یونانی وام گرفته است، زیرا در شکل‌های رساله‌های سنت عربی معمولاً اضلاع با کلمات برچسب‌گذاری می‌شوند. ابوکامل می‌گوید خوارزمی پیشگام و مخترع تمامی اصول جبر است. شاید منظور او این بوده که خوارزمی اصول را به شیوه‌ای علمی‌تر تنظیم کرده است.

صنعتگران، سنت‌های شفاهی، و برهان‌ها

در سه اثر به وجود گروهی از متخصصان که از جبر استفاده می‌کردند اشاره می‌شده‌است. ثابت بن قرّه (۲۲۱-۲۸۸ق)، در نیمهٔ دوم سدهٔ سوم از «اهل جبر» یاد کرد، و [احمد] خوارزمی دانشنامه‌نویس پایان سدهٔ چهارم هجری نیز از اهل جبر و مقابله نام می‌برد. ابوکامل که اجزای ده را

---

۱. عبدالحمید بن واسع جیلی (جبلی) احتمالاً هم‌عصر با خوارزمی -م
۲. Jens Høyrup تاریخ‌نگار ریاضی اهل دانمارک -م
۳. اشاره به این دارد که در برخی منابع مثلاً مفاتیح العلوم خوارزمی، جبر را یکی از فنون حساب می‌دانستند. خیام نیز در رسالهٔ جبر خود صناعت جبر و مقابله را یکی از مفاهیم ریاضی می‌شمارد که در بخشی از فلسفه موسوم به ریاضی بدان نیاز می‌افتد. -م

«پنج به اضافهٔ شئ» و «پنج منهای شئ» می‌دانست از «مَعشر[1] الحُسّاب» سخن می‌گوید.[2]

ابوالوفا بوزجانی (۳۲۸-۳۸۸ق) در کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسة (اعمال هندسی) اطلاعات بیشتری دربارهٔ هندسه‌دان عملی عرضه می‌کند. او می‌نویسد که چگونه بین صنعتگران و هندسه‌دانان نظری پیوند ایجاد می‌کرده است. آنها پیش از این با فنونی جز فنون هندسهٔ یونانی کار می‌کردند. جالب اینجاست که آن‌ها حتی برای برخی روش‌هایشان برهان هم داشتند.[3] هیچ گواهی وجود ندارد که این متخصصان کتاب‌هایی برای انتقال فنونشان نوشته باشند. در واقع، کتاب جبر خوارزمی اولین کتاب عربی شامل اصول مسّاحی است.

برهان‌های صنعتگران که توسط ابوالوفا یاد شده احتمالاً بر مقایسهٔ خطوط و سطوح معادل برای نمایش نتیجهٔ مطلوب استوار است، نه بر مقایسهٔ نسبت‌ها که مبتنی بر قضایای اصول اقلیدس است. این نوع برهان همچنین در شرح ماکسیموس پلانودس[4] بر [اثر] دیوفانتوس (قرن سیزدهم میلادی) یافت می‌شود. او با نموداری برای مثال خاص مربع کردن $1x - 5$ ثابت می‌کند که ضرب «ناقص» در «ناقص»، «زاید» است (یا به عبارت امروزی، حاصل ضرب دو جملهٔ منفی، مثبت است). پلانودس با اصول اقلیدس آشنا بود اما ترجیح داد برهان‌های خود را بر بنیان اقلیدسی بنا ننهد. برهان‌های خوارزمی هم از این نوعند. از اقلیدس یاد نشده، و نامی از نسبت‌ها به میان نیامده است. بنای استدلال‌ها بر مقایسهٔ مستقیم خطوط و مستطیل‌ها است. هویروپ برهان‌های خوارزمی را «توجیهات هندسی خام یونانی» نامیده است. او استدلال می‌کند که «توجیهات هندسی» خوارزمی بر اساس توافق سهم سنت فرعی علم [جبر به عنوان شاخه‌ای از علم]، با دیدگاه «علمی» خوارزمی حاصل شده است. در این باره با هویروپ موافقم، اما اثبات همهٔ این موارد دشوار است. در واقع درست نمی‌دانیم چقدر از این بخش کتاب، کار اصلی خود خوارزمی است.

پیشرفت‌های علمی در جبر

در سدهٔ سوم هجری با آغاز نهضت ترجمه در دورهٔ اسلامی نه تنها آثار یونانی، سانسکریت و دیگر منابع فراهم و ترجمه شد، بلکه کتاب‌های مکتوب دربارهٔ فنونی که تا آن وقت به طور شفاهی منتقل می‌شدند نیز تألیف شد. اینها شامل محاسبه با دستگاه عددنویسی هندی، حساب خطأین، احکام نجوم و جبر است. ساختار اساسی متن جبری، با قواعدی که با مسائل دنبال می‌شود، توسط خوارزمی تنظیم شد، گرچه شاید تا جبر پیش از سدهٔ سوم هجری به طور شفاهی عرضه شده بود.

---

۱. معشر = گروه، گروه مردم -م
۲. [ابوکامل ۱۹۸۶، ۳/۵۰، ۱۰/۵۱]
۳. [ابوالوفا ۱۹۷۹، ۱۴۵]. ترجمهٔ فرانسوی در [آقایانی چاوشی ۱۹۹۸، ۱۰۰]

4. Maximus Planudes

دربارهٔ این چارچوب اساسی، ریاضی‌دانانی با تفکر علمی‌تر، منشأ پیشرفت‌ها، افزوده‌ها، و اصلاحاتی شدند که قبلاً خوارزمی و ابن ترک آغاز کرده بودند.

کتاب نوشتن دربارهٔ ریاضیات در سدهٔ سوم هجری خود یک پیشرفت علمی بود. چه قواعد مسّاحی ثبت شده توسط خوارزمی، حساب خطأین عرضه شده توسط قسطا بن لوقا بعلبکی (؟-ح۳۰۰ق)، یا کتابی دربارهٔ علم الانواء، وقتی متن روی کاغذ بیاید بخت بیشتری برای جلب نظر علمی دارد. البته بسیاری از افرادی که این کتاب‌ها را نوشته‌اند احتمالاً از لحاظ نظری به موضوع علاقه داشته‌اند. این مورد دربارهٔ جبر خوارزمی مصداق دارد. آنجا پیشرفت‌های بسیار حداقلی در برهان‌ها یافت می‌شود. شاید خوارزمی ابداع‌گر دسته‌بندی این شش نوع معادله (مسائل ستّه) باشد، گرچه جبردان‌های پیش از او قواعدی برای حل سه نوع معادلهٔ مقترنه می‌شناختند. گویا او کسی بود که فکر کرد انتقال از بیان لفظی به بیان جبری در مسائل حل شده با عبارات دستوری روشن‌تر می‌شود.

دربارهٔ کتاب ابن ترک، که در حدود زمان خوارزمی نوشته شده است، چندان چیزی نمی‌توان گفت، چون تنها یک بند از آن باقی مانده است. به نظر می‌رسد سوگیری علمی بیشتری نسبت به کتاب خوارزمی داشته است. کتاب سند بن علی دربارهٔ جبر هم که در اوایل سدهٔ سوم نوشته شده مفقود است.

پیشرفت بعدی ترجمهٔ قسطا بن لوقا از کتاب اریثمتیکای دیوفانتوس (نیمهٔ دوم سدهٔ سوم هجری/نهم میلادی) است. آنجاست که برای نخستین بار اسامی مفروض برای توان‌های بالاتر و برای توان‌های وارون دیده می‌شود. همچنین این کتاب کلمهٔ عربی «معادله» را معرفی کرده است.

بعداً در سدهٔ سوم هجری ثابت بن قرّه اثر کوتاه خود دربارهٔ جبر را نوشت، که دستورهایی برای حل معادلات مرکب [مقترنات] به کمک قضایایی از مقالهٔ دوم اصول اقلیدس به گفتهٔ خودش «استخراج می‌کند». این کتاب ساختار کتاب جبر سنتی را ندارد. یک رسالهٔ علمی محض است که یکی از جنبه‌های جبر را استخراج و اثبات می‌کند.

ابوکامل هم در حدود همان زمان کتاب جبرش را نوشت. او دامنهٔ برهان‌ها را به قضایای عددی در حساب و جبر بسط داد (مثل $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$). برخی از برهان‌های او شامل نمودارهای هندسی شبیه نمودارهای خوارزمی است، با این تفاوت که ارجاعاتی به اقلیدس دارد، در حالی‌که برهان‌های دیگر با نمودارهایی که بر مبنای خطوط منفصل رسم شده‌اند، به سبک قضایای اقلیدس در نظریهٔ اعداد نوشته شده‌اند. این دو نوع برهان گویای کشمکش بین هندسه و جبر است که بعداً به دو شیوهٔ مختلف توسط خیام و ابن بنّا حل شد. ابوکامل الگوریتم‌هایی هم برای یافتن مستقیم مال یافت (چون در بسیاری از مسائل مقداری است که یافتن آن مورد نظر است)، و هوشمندانه با

ریشه‌های دوم یک جمله‌ای‌ها و دو جمله‌ای‌های جبری کار کرد. او در مسائل حل شده، با توان‌ها تا x^8 سر و کار داشت. بسیاری از برهان‌های او را می‌توان بـه طـور پراکنـده میـان مسـائل حـل شـده یافت، از جمله تنها برهان جبری پیش مدرن که می‌شناسم. کتاب او نمونهٔ خوبی از کاری است کـه ریاضی‌دانی با گرایش‌های نظری، می‌تواند با ساختار اساسی کتابی عملی انجام دهد.

دیوفانتوس و ابوکامل هـر کـدام تـأثیر زیـادی روی کرجـی داشـتند، همـو کـه بررسـی حسـاب چندجمله‌ای‌ها، از جمله توان‌های وارون را به طور جدی شروع کرد، و نتایج حاصل از تقسیم را در معـادلات وارد کـرد. کـار او را سـموأل دنبـال کـرد، و الگوریتم‌هـایی بـرای یـافتن ریشـه‌های چندجمله‌ای‌ها مبتنی بر قواعد مشابه برای اعداد تعمیم داد. کرجـی سـاختار سـنتی مـتن جبـری را حفظ کرد، اما رسالهٔ سموأل مسائل حل شـده را بـه شـدت کـاهش می‌دهـد بـه طـوری کـه کتـاب مشخصاً شکل متفاوتی دارد.

کشمکشی که بین هندسه و حساب در برهان‌های ابوکامل مشهود است، ابن بنّا را به ترک هندسه و عرضهٔ قضایایی در حساب و جبر با برهان‌های حسابیِ محض هدایت کرد. او همچنین در فصلی از کتاب خود دربارهٔ جذرها، زبان و نظریهٔ دوجمله‌ای‌ها و آپوتوم‌هـا (خطـوط منفصـل) را از مقالـهٔ دهم [\اصول] اقلیدس برای اعداد به کار برد. ابن بنّا همچون ابوکامل و کرجی، سـاختار سـنتی را در کتاب جبر خود حفظ کرد.

از سوی دیگر، هندسه‌دانان نظری، در جبر ابـزار توانمنـدی بـرای حـل مسـائل هندسـهٔ احجـام یافتند. هر مسئله که بتوان آن را با معادلهٔ درجه سوم یا درجهٔ کمتر بیان کرد، می‌تواند بـا سـاده کـردن معادله به یکی از بیست و پنج مسئلهٔ تعیین شده تبدیل شود. خیام راه‌حل‌های معادلات ساده شده را در رسالهٔ خود با عنوان رسالة فی البراهین علی مسائل الجبر والمقابله شرح می‌دهد. خیام هـم مثـل ارسطو و اقلیدس اصطلاح «عدد» را تنها به اعداد صحیح مثبت اطلاق کرد. چـون جبـر بـر اسـاس حساب عملی که شامل کسرها و جذرهای گنگ است، پایه گذاری شده است، خیام پایه گـذاری را به کمیت‌های پیوسته تغییر داد. با فرض وجود یک پاره خط واحد، او اعـداد جبرگرایـان را بـه عنـوان اندازه های بدون بُعد کمیت‌ها در نظر گرفت. عددی مثل x^5 می‌تواند طول یک خط، مساحت یک ناحیهٔ مسطح، یا حجم یک جسم باشد. شرف الدین طوسی راه خیام را ادامه داد و علاوه بر کارهـای دیگر، ترسیماتی برای راه‌حل‌های دو و سه بعدی معادلات عرضه کـرد. کتاب‌هـای خیـام و طوسـی هیچ مسئلهٔ حل شده‌ای ندارند و رساله‌هایی صرفاً علمی‌اند.

خلاصه

جبر در دورهٔ اسلامی با سخنرانی، محاسبه روی سطوح پاک شدنی، حساب هـوایی (ذهنـی)، و در کتاب‌های نوشته شده انتشار یافت. دسته‌ای از مسائل حفظ، بازسـازی و ابـداع و در بسـتری صـرفاً

جبری عرضه شدند. امروزه کتاب‌های معدودی در اختیار داریم و در آن‌ها اطلاعات کمی از مسائلی که در فرایند پیوستهٔ اصلاح در دستان گروه‌های بازرگانان و ریاضی‌دانان بودند در خود دارند. به‌ویژه، مجموعه‌ای از مسائل کتاب خوارزمی را نمی‌توان به عنوان عنصر متنی مقرر در کتابی که توسط یک نفر تألیف شده در نظر گرفت. اثر او باید به عنوان بخشی از یک فرایند در نظر گرفته شود، و با نگرش پژوهشگران فرهنگ عامه (فولکلور) مطالعه شود. مسائل او وقتی با مسائل کتاب‌های دیگر مقایسه شود، بهتر مورد توجه قرار می‌گیرد. این تنها روش برای شروع تعیین میزان مشارکت هر فرد، و درک پویایی دسته‌هایی از مسائل و مانند آن است؛ همه برای درک چگونگی کاربرد و اصلاح مسائل توسط افرادی که آنها را نشر می‌دادند.

منابع

ابن غازی، بغیة الطلاب وشرح منیة الحسّاب، نسخهٔ کتابخانهٔ کنگرهٔ آمریکا، مجموعهٔ منصوری، شمارهٔ ۷۲۲-۵، تصویر در اینترنت به نشانی http://lccn.loc.gov/2008401022.

ابوکامل، کتاب في الجبر والمقابلة، چاپ عکسی نسخهٔ استانبول، قره مصطفی پاشا، شمارهٔ ۳۷۹، به کوشش یان پ. هوخندایک، فرانکفورت، ۱۹۸۶.

بوزجانی، ابوالوفا، ما یحتاج إلیه الصانع من علم الهندسة، تصحیح صالح احمدعلی، مرکز احیاء تراث العلمی العربی، بغداد، ۱۹۷۹.

حصّار، محمد، کتاب البیان والتذکار في صنعت عمل الغبار، نسخهٔ شمارهٔ ۲۹۳ مجموعهٔ لارنس-شوئنبرگ، تصویر در اینترنت به نشانی /http://dewey.library.upenn.edu/sceti/ljs

خوارزمی، محمد بن موسی، کتاب جبر و مقابله، ترجمهٔ حسین خدیوجم، کمیسیون ملی تربیتی، علمی و فرهنگی ملل متحد «یونسکو» در ایران، ۱۳۶۲.

سعیدان، احمد سلیم، تراث علم الجبر في العالم العربی، ۲ جلد، المجلس الوطنی لثقافة والفنون والآداب، قسم التراث العربی، کویت، ۱۹۸۶.

السلمی، علی، المقدمة الکافیة في حساب الجبر والمقابلة وما یعرف به قیاسه من الأمثلة، نسخهٔ واتیکان، Sbath۵.

فارسی، کمال الدین، اساس القواعد في أصول الفوائد، تصحیح مصطفی موالدی، معهد المخطوطات العربیة، قاهره، ۱۹۹۴.

کرجی، ابوبکر محمد بن حاسب، البدیع في الحساب، نسخهٔ کتابخانهٔ واتیکان ۳۶/۱ خاوری، تصحیح عادل انبوبا، بیروت، دانشگاه لبنان، ۱۹۶۴.

Aghayani-Chavoshi, Jafar, 1998. “Abu al-Wafā: Innovateur de la géométrie pratique dans le monde islamique”. pp. 95-118 in: Z. Vesel, H. Beikbaghban, and B. Thierry de Crussol des Epesse, edd. *La Science dans le Monde Iranien à l’Epoque Islamique*. Téhéran: Institut Français de Recherche en Iran; Louvain, Belgique: Diffusion, Peeters, 1998.

Saidan, A. S., 1974. “The arithmetic of Abū al-Wafā”, *Isis* 65, pp. 367-375.